تطبيقات الرياضيات

الجزء الخاص

بالشرح و التمارين





تطبيق
التعلّم التفاعلى

المعاصر 2024

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

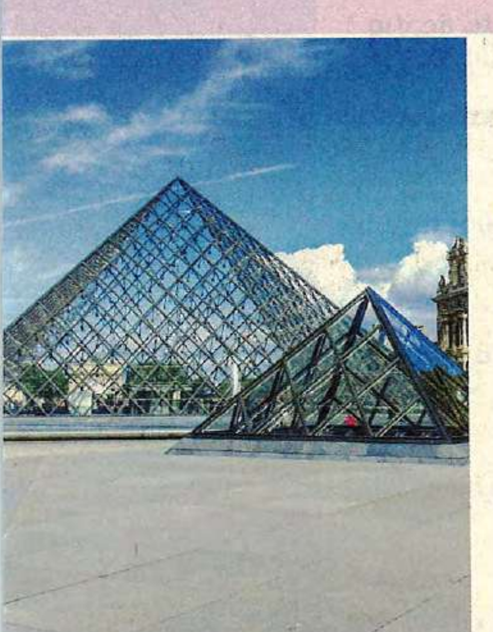
محتويات الكتاب

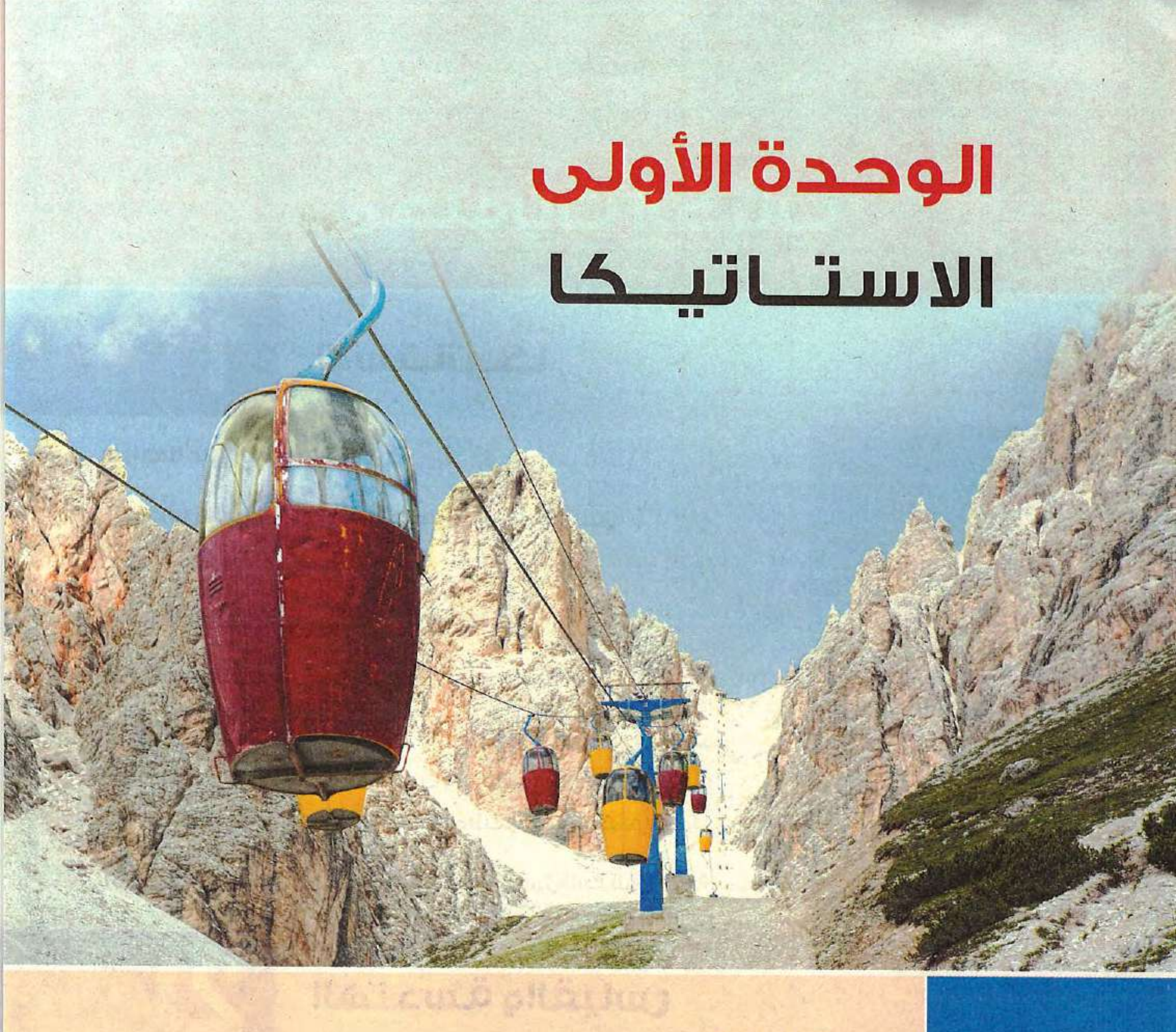
الوحدة 1 الاستاتيكا





الوحدة 2 الهندسة والقياس





الوحدة الأولى

الاستاتيكا

* مراجعة على المتجهات

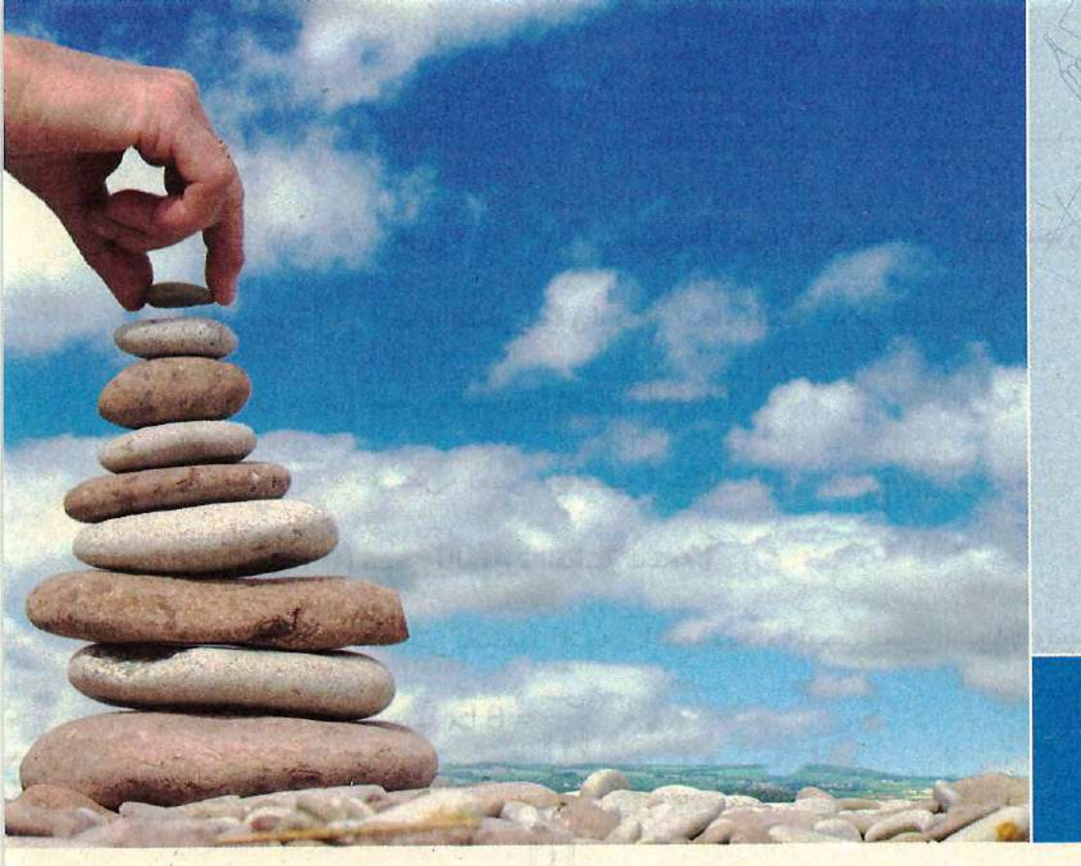
الدرس 1 — القوى - محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة.

الدرس 2 — تحليل القوة إلى مركبتين.

الدرس 3 — محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة.

الدرس 4 — اتزان جسم تحت تأثير قوتين/ثلاث قوى متلاقية فى نقطة (قاعدة مثلث القوى - قاعدة لامى).

الدرس 5 — تابع الاتزان (تلاقى خطوط عمل ثلاث قوى متزنة).



مراجعة على المتجهات

• تنقسم الكميات التى نتعامل معها فى حياتنا إلى نوعين :

١ **الكمية القياسية :** هى كمية تتعين تمامًا بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية.

أى أن يلزم لتعريفها تعريفًا تامًا معرفة مقدارها فقط.

ومن أمثلتها : الطول - الكتلة - الزمن - درجة الحرارة - الحجم - المسافة.

٢ **الكمية المتجهة :** هى كمية تتعين بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية بالإضافة إلى الاتجاه.

أى أن يلزم لتعريفها تعريفًا تامًا معرفة مقدار واتجاه هذه الكمية.

• **القطعة المستقيمة الموجهة :** هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

• **معيار القطعة المستقيمة الموجهة (معيار $\overrightarrow{\text{أب}}$) :** هو طول $\overline{\text{أب}}$ ويرمز له بالرمز $\| \overrightarrow{\text{أب}} \|$

• تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كانتا لهما نفس الطول (المعيار) ونفس الاتجاه.

• $\overrightarrow{\text{أب}} \neq \overrightarrow{\text{بأ}}$ (لاختلافهما فى الاتجاه)

• $\overrightarrow{\text{أب}} = -\overrightarrow{\text{بأ}}$ • $\| \overrightarrow{\text{أب}} \| = \| \overrightarrow{\text{بأ}} \|$

• متجه الموضع لنقطة معلومة أ بالنسبة لنقطة الأصل و هو القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{وأ}}$ ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{أ}}$

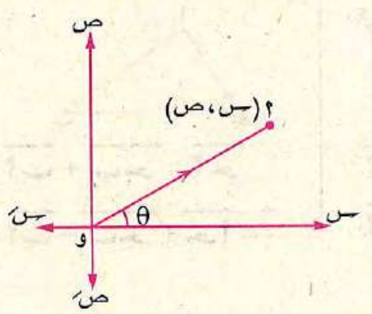
فمثلًا : فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{وأ}}$ هو متجه الموضع لنقطة أ (س ، ص) فإن :

* $\| \overrightarrow{\text{أ}} \|$ = طول $\overline{\text{وأ}}$ = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

وإذا كان : $\| \overrightarrow{\text{أ}} \|$ = ١ وحدة طول (الوحدة)

فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ يسمى متجه الوحدة.



* $\overrightarrow{س} = (١ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١)$ هما متجها الوحدة الأساسيان فى اتجاه محورى الإحداثيات.

* $\overrightarrow{و} = (٠ ، ٠)$ هو المتجه الصفرى وهو ليس له اتجاه وأحيانًا يرمز له بالرمز $\overrightarrow{٠}$

* $\overrightarrow{أ} = (س ، ص)$ تسمى بالصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{أ}$

* $\overrightarrow{أ} = س \overrightarrow{س} + ص \overrightarrow{ص}$ تعبير عن المتجه $\overrightarrow{أ}$ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

* $\overrightarrow{أ} = (\|\overrightarrow{أ}\| ، \theta)$ تسمى بالصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$

* θ هى قياس الزاوية التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وتسمى بالزاوية القطبية.

* $س = \|\overrightarrow{أ}\| \text{ جتا } \theta$ ومنها $\text{جتا } \theta = \frac{س}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

* $ص = \|\overrightarrow{أ}\| \text{ جا } \theta$ ومنها $\text{جا } \theta = \frac{ص}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

● إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (س_١ ، ص_١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (س_٢ ، ص_٢)$ فإن :

* $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ إذا وإذا فقط كان $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

* $\overrightarrow{أ} \pm \overrightarrow{ب} = (س_١ \pm س_٢ ، ص_١ \pm ص_٢)$

* $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (س_٢ - س_١ ، ص_٢ - ص_١)$

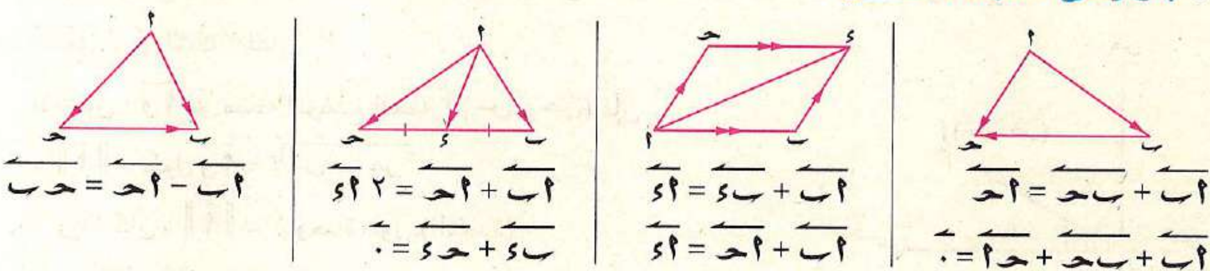
* $ك \overrightarrow{أ} = ك (س ، ص) = (ك س ، ك ص)$

* $\overrightarrow{أ} // ك \overrightarrow{أ}$ مع مراعاة أن :

إذا كان :
- $ك > ٠$ فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $ك \overrightarrow{أ}$ لهما نفس الاتجاه
- $ك < ٠$ فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $ك \overrightarrow{أ}$ متضادان فى الاتجاه

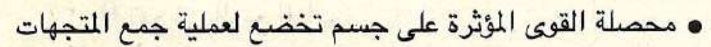
حيث $ك \neq$ صفر

● **جمع وطرح المتجهات هندسيًا :**

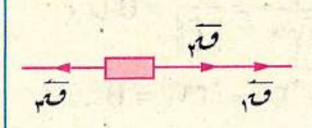


تطبيقات فيزيائية

القوة المحصلة $\overleftarrow{ح}$



- محصلة القوى المؤثرة على جسم تخضع لعملية جمع المتجهات



أى أن القوة المحصلة $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} + ...$

فمثلًا إذا حددنا متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه حركة الجسم فإنه فى حالة :

حركة جسم على مستوى خشن	الحركة الرأسية
(قوة الدفع) $\overleftarrow{ق}$ = ٥ نيوتن ، $\overleftarrow{ك}$ = ٣ نيوتن (قوة الاحتكاك) ، $\overleftarrow{ى}$	(قوة المقاومة) م = ٣٠ ث.كجم ، $\overleftarrow{ى}$ ، و = ٥٠ ث.كجم (قوة الوزن)
القوة المحصلة $\overleftarrow{ح} = ٥\ \overleftarrow{ى} + (-٣\ \overleftarrow{ى}) = ٢\ \overleftarrow{ى}$	القوة المحصلة $\overleftarrow{ح} = ٥٠\ \overleftarrow{ى} + (-٣٠\ \overleftarrow{ى}) = ٢٠\ \overleftarrow{ى}$
أى أن	**أى أن**
• مقدار المحصلة = ٢ نيوتن	• مقدار المحصلة = ٢٠ ث.كجم
• اتجاه المحصلة فى اتجاه حركة الجسم	• اتجاه المحصلة فى اتجاه وزن الجسم

- إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار ولهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين فإن القوة المحصلة $(\overleftarrow{ح}) = \overleftarrow{٠}$
- إذا كانت محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة واحدة = $\overleftarrow{٠}$
  هذا يعنى أن مجموعة هذه القوى متزنة.

مثال ١

١ اكتب المتجه $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -\sqrt{٣})$ بالصورة القطبية.

٢ اكتب بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه $\overleftarrow{أ}$ الذى معياره ١٠ وحدات طول ويعمل فى اتجاه الشمال الغربى.

الحـــل

1 ∵ $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٩ + ٣} = ٢\sqrt{٣}$ ∴ جتا θ = $\frac{س}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} > ٠$

، جا θ = $\frac{ص}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{-\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣}} = \frac{-١}{٢} < ٠$ ∴ θ تقع فى الربع الرابع.

∴ θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠° ∴ $\overrightarrow{أ} = (٢\sqrt{٣} ، ٣٣٠°)$

2 ∵ $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٠$ ، θ = ١٣٥°

، ∵ س = $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا θ = ١٠ جتا ١٣٥° = $-٥\sqrt{٢}$

، ص = $\|\overrightarrow{أ}\|$ جا θ = ١٠ جا ١٣٥° = $٥\sqrt{٢}$

∴ $\overrightarrow{أ} = (-٥\sqrt{٢} ، ٥\sqrt{٢})$ ∴ $\overrightarrow{أ} = -٥\sqrt{٢}\,\overrightarrow{س} + ٥\sqrt{٢}\,\overrightarrow{ص}$

مثال 2

إذا كانت القوى : $\overrightarrow{ق_١} = ٢\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = أ\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_٣} = ٥\,\overrightarrow{س} + ب\,\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة مادية.

أوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت هذه القوى :

1 محصلتها $٥\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}$ 2 متزنة.

الحـــل

المحصلة = $\overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣}$ = $(٢\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص}) + (أ\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}) + (٥\,\overrightarrow{س} + ب\,\overrightarrow{ص})$

= (٢ + أ + ٥) $\overrightarrow{س}$ + (٣ + ١ + ب) $\overrightarrow{ص}$

= (٧ + أ) $\overrightarrow{س}$ + (٤ + ب) $\overrightarrow{ص}$

1 ∵ المحصلة = $٥\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}$

∴ (٧ + أ) $\overrightarrow{س}$ + (٤ + ب) $\overrightarrow{ص}$ = $٥\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}$

∴ ٧ + أ = ٥ ∴ أ = −٢

، ٤ + ب = −٢ ∴ ب = −٦

2 ∵ القوى متزنة ∴ المحصلة = $\overrightarrow{٠}$

∴ (٧ + أ) $\overrightarrow{س}$ + (٤ + ب) $\overrightarrow{ص}$ = $\overrightarrow{٠}$ ∴ أ = −٧ ، ب = −٤

تمارين تراكمية على المتجهات

من أسئلة الكتاب المدرسى | • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معيار المتجه $\overrightarrow{أ}$ = −٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ هو .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١

(٢) الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{ب}$ = (٥ $\sqrt{٢}$ ، ٢٢٥°) هى ....

(أ) (٥ ، ٥) (ب) (−٥ ، −٥) (جـ) (٥ ، −٥) (د) (−٥ ، ٥)

(٣) قياس الزاوية القطبية للمتجه $\overrightarrow{ب}$ = − $\overrightarrow{س}$ + $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٤) الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ = $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ + $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$ هى ....

(أ) (٢ ، ١٣٥°) (ب) (٤ ، ٤٥°) (جـ) (٢ ، ٤٥°) (د) (٤ ، ١٣٥°)

(٥) الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{م}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ١٢ $\overrightarrow{ص}$ هى ....

(أ) (١٧ ، ٤٨″ ٢٢′ ٦٧°) (ب) (١٧ ، ١٢″ ٣٧′ ٢٢°)

(جـ) (١٣ ، ٤٨″ ٢٢′ ٦٧°) (د) (١٣ ، ١٢″ ٣٧′ ٢٢°)

(٦) 📖 المتجه الذى يعبر عن قوة مقدارها ٢٠ ث.كجم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق يكتب على الصورة الإحداثية كالآتى ....

(أ) (١٠ ، −١٠ $\sqrt{٣}$) (ب) (١٠ $\sqrt{٣}$ ، −١٠)

(جـ) (−١٠ ، ١٠ $\sqrt{٣}$) (د) (١٠ $\sqrt{٣}$ ، ١٠)

(٧) إذا كانت : $\overrightarrow{ق}$ = ك $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$ وكان ‖ $\overrightarrow{ق}$ ‖ = ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن فإن : | ك | = ...

(أ) ٦ $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٦}$ (جـ) −٢ (د) ٢

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{ق_١}$ = (٥ ، −٣) ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = (٧ ، ٤) فإن محصلة القوتين $\overrightarrow{ح}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{س}$ + ١٢ $\overrightarrow{ص}$ (ب) ٩ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$

(جـ) ٣٥ $\overrightarrow{س}$ − ١٢ $\overrightarrow{ص}$ (د) ١٢ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$

(٩) إذا كان : $\overline{ق_١} = ٥ \overline{س}$ ، $\overline{ق_٢} = ٧ \overline{س} - ٥ \overline{ص}$ فإن : $\| \overline{ح} \|$ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٢ (ب) ٥ (جـ) ١٣ (د) $\sqrt{٧٣}$

(١٠) إذا كانت : $\overline{ق_١} = ٢ \overline{س} + ٣ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = \overline{س} + \overline{ص}$

فإن مقدار محصلتهما .... وحدة قوة.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

(١١) قوتان مقداراهما ٥ نيوتن ، ٧ نيوتن تؤثران فى اتجاه الشرق فإن المحصلة = ...

(أ) ١٢ نيوتن فى اتجاه الشرق. (ب) ٢ نيوتن فى اتجاه الشرق.

(جـ) ١٢ نيوتن فى اتجاه الغرب. (د) ٢ نيوتن فى اتجاه الغرب.

(١٢) إذا كانت $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ ، $\overline{ق_٣}$ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة بحيث :

$\overline{ق_١} = (٢ ، -٥)$ ، $\overline{ق_٢} = (-٣ ، ٢)$ فإن : $\overline{ق_٣}$ = ...

(أ) (٢ ، ١) (ب) (-١ ، -٣) (جـ) (١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

(١٣) إذا كانت مجموعة القوى : $\overline{ق_١} = أ \overline{س} + ٧ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = -٥ \overline{س} - ب \overline{ص}$

، $\overline{ق_٣} = \overline{س} + \overline{ص}$ متزنة فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (-٤ ، -٨) (د) (٤ ، ٨)

(١٤) إذا كانت مجموعة القوى : $\overline{ق_١} = ٤ \overline{س} - ٥ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = أ \overline{س} + ٣ \overline{ص}$

، $\overline{ق_٣} = ٧ \overline{س} - ب \overline{ص}$ متزنة فإن : أ + ب = ...

(أ) ١٣ (ب) -١٣ (جـ) -١١ (د) -٢

(١٥) إذا أثرت القوى : $\overline{ق_١} = ٤ \overline{س} + ٥ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = أ \overline{س} - ٧ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣} = ٣ \overline{س} + ب \overline{ص}$

فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) -٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) -٣

(١٦) إذا كان : $\overline{ق_١} = ٢ \overline{س} - ٢ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = ٤ \overline{س} - ٨ \overline{ص}$

، محصلتهما $\overline{ح} = ٢ أ \overline{س} - ٣ ب \overline{ص}$ فإن : أ + ب = ...

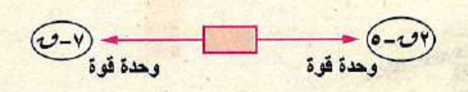
(أ) ٣ (ب) $٣ \frac{١}{٣}$ (جـ) $٦ \frac{١}{٣}$ (د) ١٢

(١٧) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = -١٤ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$

ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ، $\overrightarrow{ح}$ = (١٠ √٢ ، ٣/٤ π) فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (-١ ، ١) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (-١ ، ٢) (د) (١ ، -١)

(١٨) فى الشكل المقابل :



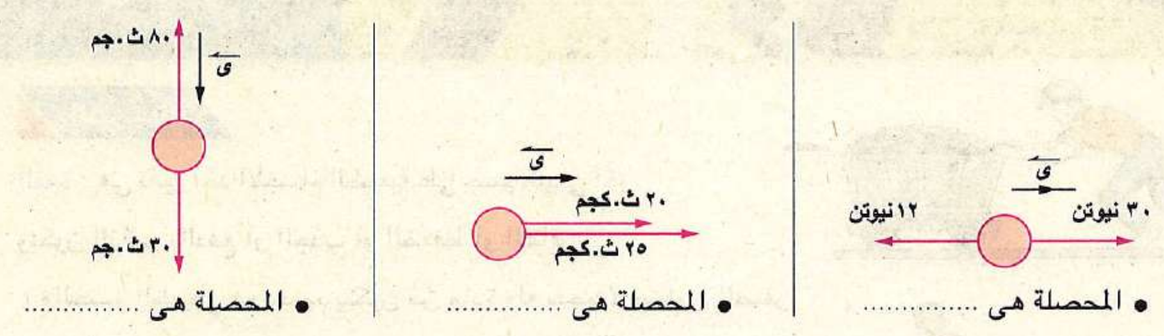
إذا كانت المجموعة متزنة

فإن : ق = ... وحدة قوة.

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ٢,٥ (د) ٣,٥

---

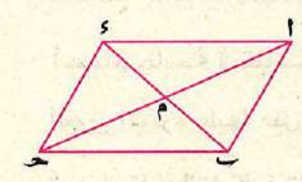
٢ اكتب بدلالة متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ محصلة القوى الموضحة بكل شكل من الأشكال التالية :



• المحصلة هى .... • المحصلة هى .... • المحصلة هى ....

---

٣ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع م نقطة تلاقى قطريه.

أكمل :

• $\overrightarrow{أب}$ + $\overrightarrow{ب حـ}$ = ... • $\overrightarrow{ءأ}$ + $\overrightarrow{ء حـ}$ = ...

• $\overrightarrow{أم}$ + $\overrightarrow{حـ م}$ = ... • $\overrightarrow{أب}$ + ٢ $\overrightarrow{ب م}$ = ...

• $\overrightarrow{أب}$ - $\overrightarrow{أم}$ = ...

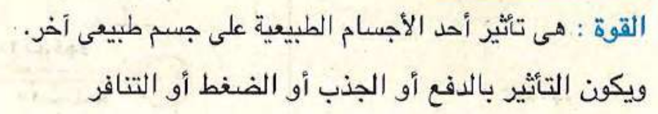


الدرس

1

القوى – محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

القـــوة

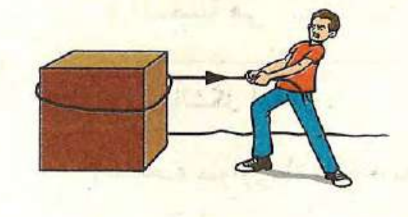


القوة : هى تأثير أحد الأجسام الطبيعية على جسم طبيعى آخر.



ويكون التأثير بالدفع أو الجذب أو الضغط أو التنافر

، والجسم الطبيعى هو جسم يتكون من مادة وله حجم لا يساوى الصفر.

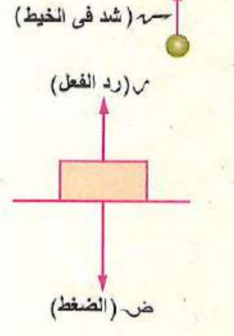


والأجسام الطبيعية تنقسم إلى نوعين :

- أجسام جاسئة (متماسكة) وهى التى لا يتغير شكلها مهما كانت القوى المؤثرة عليها مثل المعادن الصلبة أو الصخور أو ...
- أجسام قابلة للتشكل فيتغير شكلها تحت تأثير القوى مثل الخيوط والسوائل والغازات بأنواعها والمطاط والصلصال.

وستقتصر دراستنا فى هذه الوحدة على الأجسام الجاسئة فقط.

أنواع القوى



هناك أنواع مختلفة للقوى أهمها :

1. **قوى الشد (ش) :** مثل القوة التى تظهر فى الخيط (أو الحبل) عند تعليق جسم فيه.
2. **قوى الضغط (ض) :** مثل القوة التى تظهر عند ارتكاز جسم على سطح.
3. **قوة رد الفعل (ر) :** كما فى حالة رد فعل سطح أملس على جسم مرتكز عليه.
4. **قوى الجذب والتنافر :** مثل القوى التى تنشأ بين الأقطاب المغناطيسية والشحنات الكهربية والأجرام السماوية.

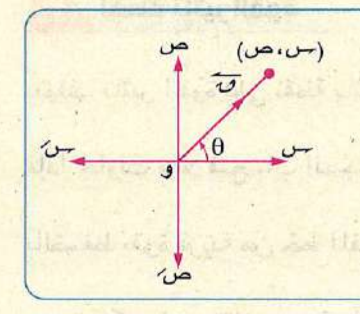
٥ **قوى التثاقل (أو الوزن)** : إذا ترك جسم فى الهواء فإنه يتحرك ساقطًا نحو سطح الأرض إذ أن الأرض تجذب جميع الأجسام نحوها بقوة تسمى «قوة جذب الأرض» أو «قوة التثاقل» أو «وزن الجسم».

* **لاحظ أن** : قوة الوزن (و) = كتلة الجسم × عجلة الجاذبية الأرضية = ك × ء

التعبير عن القوة

القوة كمية متجهة لذلك يمكن كتابتها بنفس طرق التعبير عن المتجه.

أى أن متجه القوة يمكن التعبير عنه كالتالى :



١ ق = (س ، ص) ⇐ الصورة الإحداثية.

٢ ق = س س + ص ص ⇐ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

٣ ق = (‖ق‖ ، θ) ⇐ الصورة القطبية.

تعيين القوة

القوة هى متجه يتميز بأنه يمر بنقطة محددة أى أنه يعمل فى خط مستقيم معلوم :

أى أن القوة تتعين تمامًا بمعرفة

١ مقدار القوة. ٢ اتجاه القوة. ٣ نقطة تأثير القوة.



فمثلًا :

لاعب كرة القدم يركل الكرة بقوة معينة (مقدار القوة) فى اتجاه معين (اتجاه القوة) وفى موضع معين على سطح الكرة (نقطة تأثير القوة)

١ وحدات قياس مقدار القوة

– يقاس مقدار القوة (القيمة العددية للقوة) بوحدات تسمى وحدات تثاقلية مثل :

ثقل الجرام (ث.جم) ، ثقل الكيلو جرام (ث.كجم)

حيث ١ ث.كجم = ١٠٠٠ ث.جم = $١٠^{٣}$ ث.جم

– كما توجد وحدات أخرى لقياس مقدار القوة تسمى وحدات مطلقة مثل : الداين ، النيوتن

حيث ١ نيوتن = ١٠٠٠٠٠ داين = $١٠^{٥}$ داين

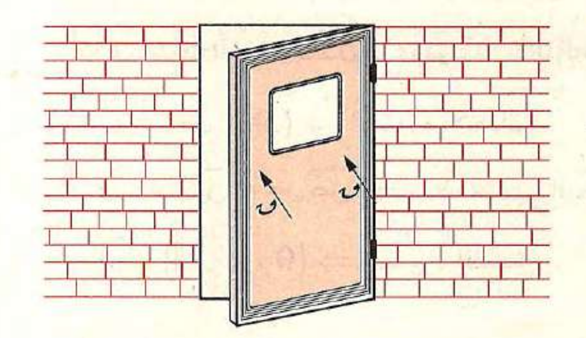
– وترتبط الوحدات التثاقلية بالوحدات المطلقة بالعلاقة :

١ ث.كجم = ٩,٨ نيوتن
١ ث.جم = ٩٨٠ داين
(ما لم يذكر خلاف ذلك)

٢ اتجاه القـوة

- اتجاه القوة هو اتجاه المتجه الذى يمثل هذه القوة ، ويتحدد بقياس الزاوية القطبية لمتجه القوة فى حالة القوى المؤثرة فى مستوى واحد.
- والزاوية القطبية هى الزاوية الموجهة الموجبة التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

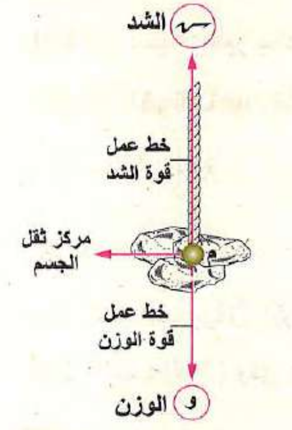
٣ نقطة تأثير القوة



يتوقف تأثير القوة على نقطة تأثيرها.

فإذا حاولت مثلًا فتح باب الحجرة أو غلقه بالضغط بقوة قريبة من خط المفصلات فإنك تجد صعوبة كبيرة ، وتتلاشى هذه الصعوبة كلما ابتعدت عن خط المفصلات كما فى الشكل المقابل.

خط عمل القوة

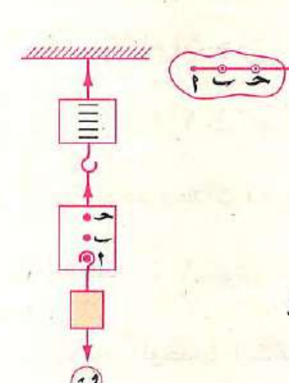


خط عمل القوة هو الخط المستقيم المار بنقطة تأثيرها والموازى لاتجاهها.

فمثلًا :

- خط عمل الشد فى خيط هو الخيط نفسه.
- خط عمل قوة وزن الجسم هو الخط الرأسى المار بمركز ثقل الجسم.

«نقل نقطة تأثير القوة» أو مبدأ «نفاذ القوة»



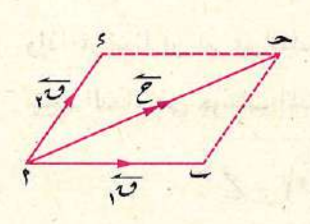
إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى جسم متماسك وكانت نقطة تأثيرها ؟ فإنه يمكن نقل نقطة التأثير إلى أى نقطة أخرى موجودة على الجسم «ب» أو «حـ» أو ... على خط عمل $\overleftarrow{ق}$ دون أن يغير ذلك من تأثيرها على الجسم أى أن أية نقطة موجودة على الجسم على خط عمل قوة يمكن اعتبارها نقطة تأثير لهذه القوة.

محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

محصلة قوتين أو أكثر هى قوة واحدة تحدث نفس التأثير الذى تحدثه هاتان القوتان أو مجموعة هذه القوى.

إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة هندسيًا

وتعتمد هذه الطريقة على قاعدة متوازى الأضلاع لجمع قوتين :

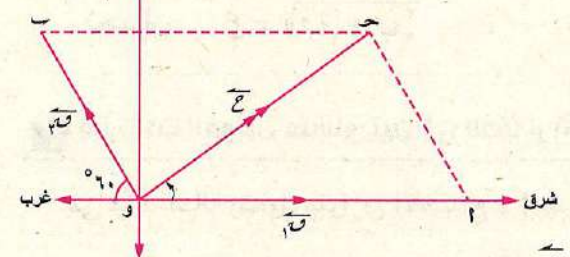


«فإذا مُثِّلت قوتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ متلاقيتان فى نقطة مقدارًا واتجاهًا بضلعى متوازى أضلاع يبدآن من هذه النقطة فإن محصلتهما ($\overleftarrow{ح}$) تمثل مقدارًا واتجاهًا بقطر متوازى الأضلاع الذى يبدأ من نفس النقطة»

أى أن $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2}$

مثال ١

$\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ قوتان تؤثران فى نقطة (و) من جسم متماسك حيث $ق_1 = ٥٠٠$ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشرق ، $ق_2 = ٣٠٠$ نيوتن وتعمل فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب. أوجد محصلتهما بيانيًا.



الحل

* نختار مقياس رسم ١ سم لكل ١٠٠ نيوتن
* نرسم $\overleftarrow{و أ}$ يمثل $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{و ب}$ يمثل $\overleftarrow{ق_2}$

حيث $\| \overleftarrow{و أ} \| = ٥$ سم ، $\| \overleftarrow{و ب} \| = ٣$ سم

* نكمل متوازى الأضلاع و أ جـ ب فيكون $\overleftarrow{و جـ}$ يمثل المحصلة $\overleftarrow{ح}$
* بالقياس نجد أن : $\| \overleftarrow{و جـ} \| = ٤,٤$ سم تقريبًا ، ق(∠ أ و جـ) = ٣٧°

∴ $\overleftarrow{ح}$ تؤثر فى (و) ومقدارها ٤٤٠ نيوتن فى اتجاه ٣٧° شمال الشرق تقريبًا.

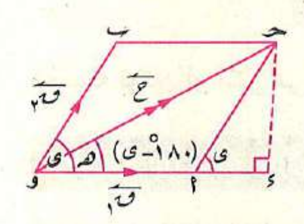
ملاحظة

أ
ب
جـ
د
و
$\overleftarrow{ق_1}$
$\overleftarrow{ق_2}$
$\overleftarrow{ح}$
مقدارًا و اتجاهًا فقط
تمثيلاً تامًا

إذا كانت $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثران فى نقطة (و) ومثلناهما تمثيلاً تامًا (أى مقدارًا واتجاهًا وخط عمل) بالمتجهين $\overleftarrow{أ و}$ ، $\overleftarrow{و ب}$

كما فى الشكل المقابل فطبقًا لقاعدة جمع متجهين يكون $\overleftarrow{أ ب}$ ممثلاً لمحصلة هذين المتجهين. ولكن خط عمل محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ يجب أن يمر بالنقطة (و) نقطة تأثيرهما ، لذلك نرسم من (و) قطعة مستقيمة موجهة $\overleftarrow{و جـ}$ تكافئ $\overleftarrow{أ ب}$ فتكون هى التى تمثل محصلة القوتين تمثيلاً تامًا.

إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليًا



نفرض أن $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ قوتان متلاقيتان فى نقطة (و)

وأن قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين = ى

فإذا كان $\overline{و أ}$ ، $\overline{و ب}$ تمثلان $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ فإن $\overline{و حـ}$ تمثل المحصلة $\overline{ح}$

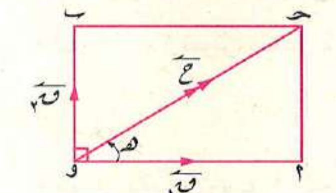
وإذا فرضنا أن هـ هو قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة $\overline{ح}$ مع القوة $\overline{ق_١}$ فإنه كما سبق فى دراسة قاعدة جيب التمام فى حساب المثلثات يمكن إيجاد محصلة القوتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ مقدارًا واتجاهًا من العلاقتين الآتيتين :

$$ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى} \quad ، \quad ظا هـ = \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى}$$

حيث $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ح مقادير القوى $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ ، $\overline{ح}$

حالات خاصة

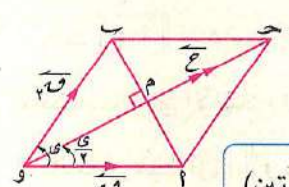
١ إذا كانت القوتان متعامدتين (أى أن : ى = ٩٠°) :



∴ جتا ى = ٠ ، جا ى = ١ وبالتعويض فى العلاقتين السابقتين

نجد أن $ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$ ، $ظا هـ = \frac{ق_٢}{ق_١}$

٢ إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار (أى أن : $ق_١ = ق_٢ = ق$) :



فى هذه الحالة يتحول متوازى الأضلاع و أ حـ ب إلى معين

ويكون ح = و حـ = ٢ و م = ٢ و أ جتا $\frac{ى}{٢}$ = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$

أى أن ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ ، هـ = $\frac{ى}{٢}$ (حيث $\overline{ح}$ تنصف الزاوية بين القوتين)

* لاحظ أن : إذا كانت ى = ١٢٠° فإن : ح = ق

٣ إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفى نفس الاتجاه (أى أن : ى = ٠°) :

(و) $\overline{ق_١}$ $\overline{ق_٢}$

∴ جتا ى = ١ وبالتعويض

$$∴ ح = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ × ١} = \sqrt{(ق_١ + ق_٢)^٢} = ق_١ + ق_٢$$

أى أن $ح = ق_١ + ق_٢$ ويكون اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه خط عمل القوتين.

* وتسمى ح فى هذه الحالة أكبر محصلة أو القيمة العظمى للمحصلة.

٤ إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين (أى أن : ى = ١٨٠°) :

∴ جتا ى = −١ وبالتعويض

∴ $ح = \sqrt{ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢} \times (-١)} = \sqrt{ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ٢ ق_{١} ق_{٢}}$

$= \sqrt{(ق_{١} - ق_{٢})^{٢}} = |ق_{١} - ق_{٢}|$

أى أن $ح = |ق_{١} - ق_{٢}|$ ويكون اتجاه المحصلة فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا.

* وتسمى ح فى هذه الحالة أصغر محصلة أو القيمة الصغرى للمحصلة.

٥ إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار ولهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين :

فى هذه الحالة يكون : $ق_{١} = ق_{٢} = ق$ ، ى = ١٨٠°

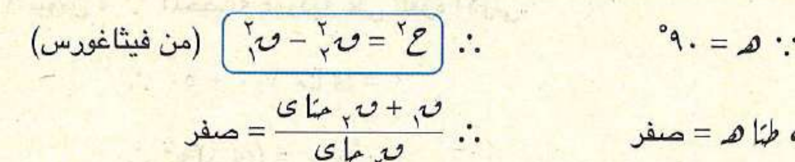
∴ جتا ى = −١

∴ $ح = \sqrt{ق^{٢} + ق^{٢} - ٢ ق^{٢}} = ٠$

∴ ح = صفر

أى أن المحصلة هى المتجه الصفرى.

٦ إذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى (أى أن : هـ = ٩٠°) :



∵ هـ = ٩٠°

∴ $ح^{٢} = ق_{٢}^{٢} - ق_{١}^{٢}$ (من فيثاغورس)

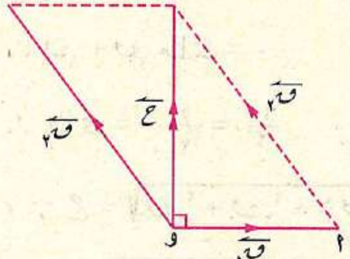
، طا هـ = صفر

∴ $\frac{ق_{٢} \text{ جا ى}}{ق_{١} + ق_{٢} \text{ جتا ى}}$ = صفر

∴ $ق_{١} + ق_{٢}$ جتا ى = صفر

∴ جتا ى $= \frac{-ق_{١}}{ق_{٢}}$

∴ ى زاوية منفرجة ، $ق_{٢} > ق_{١}$



أى أن المحصلة عندما تكون عمودية على إحدى القوتين فإنها دائمًا تكون متعامدة مع القوة الصغرى.

مثال ٢

قوتان مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية والزاوية بين اتجاهيهما قياسها ٦٠°

أوجد مقدار واتجاه محصلتهما تحليليًا.

الحل

∵ $ح = \sqrt{ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢} \text{ جتا ى}}$

∴ $ح = \sqrt{٢٥ + ٩ + ٢ \times ٥ \times ٣ \times \text{جتا } ٦٠°} = ٧$ نيوتن

، ∵ طا هـ $= \frac{ق_{٢} \text{ جا ى}}{ق_{١} + ق_{٢} \text{ جتا ى}}$

∴ طا هـ $= \frac{٣ \text{ جا } ٦٠°}{٥ + ٣ \text{ جتا } ٦٠°} = \frac{٣\sqrt{٣}}{١٣}$

∴ هـ ≃ ٢١° ٤٧َ

∴ المحصلة ح مقدارها ٧ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٢١° ٤٧َ

مثال ③

قوتان متعامدتان مقداراهما ٦ ، ٢,٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية أوجد مقدار واتجاه محصلتهما.

الحـــل

$\because$ ح $= \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2}$ $\therefore$ ح $= \sqrt{(٦)^2 + (٢,٥)^2} = ٦,٥$ نيوتن

، $\because$ ظا هـ $= \frac{ق_2}{ق_1}$ $\therefore$ ظا هـ $= \frac{٢,٥}{٦} = \frac{٥}{١٢}$ $\therefore$ هـ $\simeq$ °٢٢ َ٣٧

$\therefore$ المحصلة $\overline{ح}$ مقدارها ٦,٥ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٧ َ°٢٢

مثال ④

قوتان مقداراهما ٥٠ ، ١٠٠ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى

أوجد قياس الزاوية بينهما ومقدار المحصلة.

الحـــل

$\because$ ق$_1$ = ٥٠ نيوتن ، ق$_2$ = ١٠٠ نيوتن ، $\because$ المحصلة عمودية على القوة الأولى.

$\therefore$ ق$_1$ + ق$_2$ جتا ى = ٠ $\therefore$ ٥٠ + ١٠٠ جتا ى = ٠

$\therefore$ جتا ى $= \frac{-٥٠}{١٠٠} = \frac{-١}{٢}$ $\therefore$ ق (د ى) = °١٢٠

، $\because$ ح $= \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + ٢ ق_1 ق_2 جتا ى}$

$\therefore$ ح $= \sqrt{(٥٠)^2 + (١٠٠)^2 + ٢ \times ٥٠ \times ١٠٠ \text{ جتا } ١٢٠°} = ٥٠\sqrt{٣}$ نيوتن

حل آخر :

بفرض أن $\overline{وأ}$ يمثل القوة التى مقدارها ٥٠ نيوتن

، $\overline{وب}$ يمثل القوة التى مقدارها ١٠٠ نيوتن

، $\because$ المحصلة عمودية على القوة الأولى

$\therefore$ Δ و أ حـ قائم الزاوية فى و $\therefore$ جتا أ $= \frac{وأ}{أحـ} = \frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ ق (د أ) = °٦٠ $\therefore$ ق (د أ و ب) = °١٢٠ وهو قياس الزاوية بين القوتين.

، $\because$ ح^2 = (١٠٠)^2 − (٥٠)^2 $\therefore$ ح $= \sqrt{(١٠٠)^2 - (٥٠)^2} = ٥٠\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال ٥

قوتان تؤثران فى نقطة مادية ، فإذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما ٣٢ ث.كجم وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما ١٢ ث.كجم أوجد مقدار كل من القوتين ثم أوجد مقدار محصلتهما إذا كان قياس الزاوية بين القوتين = ٦٠°

الحل

بفرض أن القوة الكبرى = $ق_{١}$ ، القوة الصغرى = $ق_{٢}$

∴ $ق_{١} + ق_{٢} = ٣٢$ (١) ، $ق_{١} - ق_{٢} = ١٢$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) معًا : ∴ $ق_{١} = ٢٢$ ث.كجم ، $ق_{٢} = ١٠$ ث.كجم

وإذا كان : $ق(\angle ى) = ٦٠^\circ$

∴ $ح = \sqrt{(٢٢)^{٢} + (١٠)^{٢} + ٢ \times ٢٢ \times ١٠ \text{ جتا } ٦٠^\circ} = ٢\sqrt{٢٠١}$ ث.كجم

مثال ٦

قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما $٧٠\sqrt{٣}$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

أوجد مقدار كل من القوتين.

الحل

∵ القوتين متساويتان فى المقدار ∴ $ح = ٢ ق \text{ جتا } \frac{ى}{٢}$

∴ $٧٠\sqrt{٣} = ٢ ق \text{ جتا } ٣٠^\circ$ ∴ $ق = ٧٠$ نيوتن

∴ القوتان هما ٧٠ نيوتن ، ٧٠ نيوتن.

مثال ٧

قوتان مقداراهما ٦ ، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° أوجد مقدار المحصلة إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على القوة ق

الحل

∵ $\text{ظا } هـ = \frac{ق_{١} \text{ جا } ى}{ق_{٢} + ق_{١} \text{ جتا } ى}$ حيث هـ هى الزاوية التى تميل بها المحصلة على القوة $ق_{٢}$

∴ $\text{ظا } ٤٥^\circ = \frac{٦ \text{ جا } ١٣٥^\circ}{ق + ٦ \text{ جتا } ١٣٥^\circ}$ ∴ $١ = \frac{٣\sqrt{٢}}{ق - ٣\sqrt{٢}}$

∴ $ق - ٣\sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$ ∴ $ق = ٦\sqrt{٢}$ ث.كجم

، ∵ $ح = \sqrt{ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢} \text{ جتا } ى}$

∴ $ح = \sqrt{(٦)^{٢} + (٦\sqrt{٢})^{٢} + ٢ \times ٦ \times ٦\sqrt{٢} \text{ جتا } ١٣٥^\circ} = ٦$ ث.كجم

مثال ٨

قوتان متلاقيتان فى نقطة مادية مقداراهما ٤ ق ، ٣ ق أوجد قياس الزاوية بينهما إذا كان مقدار محصلتهما $\sqrt{13}$ ق

الحل

∵ $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2\, ق_1\, ق_2$ جتا ى

∴ $(\sqrt{13}\, ق)^2 = (4\, ق)^2 + (3\, ق)^2 + 2 \times 4\, ق \times 3\, ق$ جتا ى

∴ $13\, ق^2 = 16\, ق^2 + 9\, ق^2 + 24\, ق^2$ جتا ى

∴ $-12\, ق^2 = 24\, ق^2$ جتا ى

∴ جتا ى $= \frac{-12\, ق^2}{24\, ق^2} = \frac{-1}{2}$

∴ ق(∠ ى) = °١٢٠

مثال ٩

أثرت قوتان فى نقطة مادية مقداراهما ٧ ، ق ث.كجم وقياس الزاوية بين خطى عملهما °١٢٠ فإذا كان مقدار محصلتهما $7\sqrt{3}$ ث.كجم فأوجد مقدار ق وقياس الزاوية التى تميل بها المحصلة على اتجاه القوة الأولى.

الحل

∵ $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2\, ق_1\, ق_2$ جتا ى

∴ $(7\sqrt{3})^2 = (7)^2 + (ق)^2 + 2 \times 7 \times ق$ جتا °١٢٠

∴ $147 = 49 + ق^2 - 7\, ق$

∴ $ق^2 - 7\, ق - 98 = 0$

∴ $(ق - 14)\,(ق + 7) = 0$

∴ ق = ١٤ ثقل كجم.

، ∵ ظا هـ $= \frac{ق_2 \text{ جا ى}}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا ى}}$

∴ ظا هـ $= \frac{14 \times \text{جا } 120°}{7 + 14 \times \text{جتا } 120°} = \frac{7\sqrt{3}}{0}$ (غير معرفة)

∴ ظتا هـ = صفر

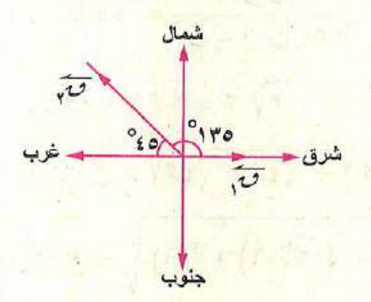
∴ هـ = °٩٠

أى أن المحصلة عمودية على القوة الأولى.

مثال ١٠

قوتان مقداراهما ٥ ، $5\sqrt{2}$ ثقل كجم تؤثران فى نقطة مادية الأولى نحو الشرق والثانية فى اتجاه الشمال الغربى أثبت أن محصلتهما مقدارها يساوى مقدار القوة الأولى وأوجد قياس الزاوية التى تميل بها المحصلة على كل من القوتين.

الحل



$ق_1$ = ٥ ث.كجم ، $ق_2 = 5\sqrt{2}$ ث.كجم ، ومن الرسم ى = °١٣٥

، ∵ $ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2\, ق_1\, ق_2 \text{ جتا ى}}$

∴ $ح = \sqrt{25 + 50 + 2 \times 5 \times 5\sqrt{2} \times \text{جتا } 135°}$

∴ ح = ٥ ث.كجم = $ق_1$

، ∵ $ظا هـ = \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى}$ ∴ $ظا هـ = \frac{٥\sqrt{٢} \times جا ١٣٥^\circ}{٥ + ٥\sqrt{٢} جتا ١٣٥^\circ} = \frac{٥}{صفر}$ (غير معرفة)

∴ ظتا هـ = صفر ∴ هـ = ٩٠°

∴ $\overrightarrow{ح}$ عمودية على اتجاه $\overrightarrow{ق_١}$ أى نحو الشمال وتميل على اتجاه $\overrightarrow{ق_٢}$ بزاوية قياسها $١٣٥^\circ - ٩٠^\circ = ٤٥^\circ$

مثال ١١

قوتان متساويتان فى المقدار ومتلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ٨ نيوتن وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ نيوتن. أوجد مقدار كل من القوتين.

الحل

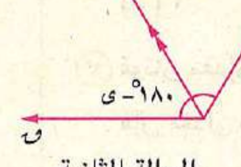
$ح_١ = ٢ ق جتا \frac{ى}{٢} = ٨$

∴ $ق جتا \frac{ى}{٢} = ٤$ (١)

، $ح_٢ = ٢ ق جتا \left(\frac{١٨٠^\circ - ى}{٢}\right) = ٦$

∴ $ق جا \frac{ى}{٢} = ٣$ (٢)





بتربيع المعادلتين (١) ، (٢) ثم الجمع :

∴ $ق^٢ جتا^٢ \frac{ى}{٢} + ق^٢ جا^٢ \frac{ى}{٢} = ١٦ + ٩$

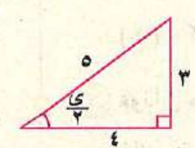
∴ $ق^٢ \left(جتا^٢ \frac{ى}{٢} + جا^٢ \frac{ى}{٢}\right) = ٢٥$ ∴ $ق^٢ = ٢٥$

∴ ق = ٥ نيوتن ∴ مقدار القوتين ٥ ، ٥ نيوتن

* لاحظ أنه يمكن حل المعادلتين كما يلى

بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١) :

∴ $ظا \frac{ى}{٢} = \frac{٣}{٤}$ ∴ $جا \frac{ى}{٢} = \frac{٣}{٥}$



بالتعويض فى معادلة (٢) :

∴ $ق \times \frac{٣}{٥} = ٣$ ∴ ق = ٥ نيوتن

∴ مقدار القوتين ٥ ، ٥ نيوتن

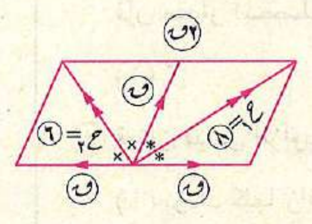
حل آخر هندسيًا : ∵ القوتان متساويتان

∴ كل من $\overrightarrow{ح_١}$ ، $\overrightarrow{ح_٢}$ تنصف الزاوية بين القوتين

∴ $\overrightarrow{ح_١} \perp \overrightarrow{ح_٢}$ ∴ $(ح_١)^٢ + (ح_٢)^٢ = (٢ ق)^٢$

∴ $٦٤ + ٣٦ = ٤ ق^٢$ ∴ $ق^٢ = ٢٥$

∴ ق = ٥ ∴ مقدار القوتين ٥ ، ٥ نيوتن



تمارين 1 على القوى - محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القوة تتعين تمامًا بمعرفة ....

(أ) مقدار القوة. (ب) اتجاه القوة. (جـ) نقطة تأثير القوة. (د) جميع ما سبق.

(٢) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

فإن مقدار محصلتهما ح = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

(٣) قوتان مقداراهما ٨ $\sqrt{٣}$ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠°

فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٦٤ (ب) ٣٢ (جـ) ١٦ (د) ٨

(٤) قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة

فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ١٧ (ب) ٧ (جـ) ١٣ (د) ١٤

(٥) القوتان ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن محصلتهما يمكن أن تكون .... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٢ (د) ١

(٦) قوتان مقداراهما ٤ ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وجيب تمام الزاوية بينهما $\frac{-٢}{٥}$

فإن مقدار محصلتهما ح = ... نيوتن.

(أ) ١٥ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٧) قوتان متلاقيتان فى نقطة مادية مقداراهما ٦ ، ٣ نيوتن والمحصلة عمودية على إحداهما

فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٣ (ب) ٣ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ (د) ٦ $\sqrt{٣}$

(٨) قوتان قياس الزاوية بينهما θ فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) يزداد كلما زادت قيمة θ (ب) تتضاعف بتضاعف قيمة θ

(جـ) يزداد كلما نقصت قيمة θ (د) لا يتغير بتغير قيمة θ

⑨ في الشكل المقابل :

مقدار محصلة القوتين المبينتين في الشكل

تساوي .... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٥

(جـ) ١ (د) $\sqrt{٧}$

⑩ في الشكل المقابل :

مقدار محصلة القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٢ ق (ب) ق

(جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) صفر

⑪ مقدار محصلة القوتين في الشكل المقابل هو ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ ق (ب) ق

(جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) $\sqrt{٥}$ ق

⑫ إذا كانت محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تنصف الزاوية بينهما فأي الجمل الآتية صحيحة ؟

(I) $ق_١ = ق_٢$ (II) $\overleftarrow{ق_١} = \overleftarrow{ق_٢}$ (III) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢}$

(أ) I فقط. (ب) I ، III فقط.

(جـ) II ، III فقط. (د) كل ما سبق صحيح.

⑬ قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما °٦٠

إذا كانت محصلتهما ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

⑭ قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما = $\frac{٢\pi}{٣}$ ومقدار محصلتهما ق نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٢ $\sqrt{٢}$

⑮ 📖 قوتان متساويتان في المقدار وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن

فإن مقدار كل قوة منهما يساوي .... نيوتن.

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

⑯ قوتان متساويتان في المقدار محصلتهما = ٧ $\sqrt{٣}$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$

فإن مقدار كل منهما يساوي .... نيوتن.

(أ) ٣ (ب) ٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٥ (د) ٧

(١٧) قوتان مقداراهما ق ، ق ث.كجم ومقدار محصلتهما ٢٤ ث.كجم وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠°

فإن : ق = ... ث.كجم.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{3}$ (جـ) ٨ $\sqrt{2}$ (د) ١٢

(١٨) قوتان مقداراهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈] ٠ ، π [، محصلتهما تنصف الزاوية بينهما

فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٢ $\sqrt{2}$ (د) ٨

(١٩) قوتان مقداراهما ٣ نيوتن ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) ٣ $\sqrt{3}$ (د) ٦

(٢٠) قوتان متعامدتان مقداراهما (٢ ق − ٥) ، (ق + ٢) نيوتن ومقدار محصلتهما ٣ $\sqrt{5}$ نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٣

(٢١) قوتان مقداراهما ٦ نيوتن ، ١٠ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٤ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ٤٥°

(٢٢) قوتان متساويتان متلاقيتان فى نقطة مقدار كل منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٢٣) قوتان مقداراهما ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن ومقدار محصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٣٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢٤) قوتان مقداراهما ٦ ، ٢,٥ نيوتن ومقدار محصلتهما تساوى ٦,٥ نيوتن فإن الزاوية بين القوتين تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

(٢٥) قوتان مقداراهما ٢ ق ، ٥ ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ى ومقدار محصلتهما ٣ ق

فإن : ى = ...

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

(٢٦) قوتان مقداراهما ٣ ق ، ق نيوتن محصلتهما ٤ ق نيوتن يكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٦٠° (ب) صفر° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

(٢٧) قوتان مقداراهما ق ، ق تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما مقدارها ق فإن قياس الزاوية بين القوتين يساوى ....

(أ) ١٢٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(٢٨) قوتان مقداراهما $ق$ ، $\sqrt{3}\,ق$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، فإذا كان مقدار محصلتهما ٢ $ق$ نيوتن فإن قياس الزاوية بين اتجاهى هاتين القوتين يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٢٩) إذا كانت : $\overline{ح} = \overline{ق_1} + \overline{ق_2}$ ، وكان : $\|\overline{ح}\| = \|\overline{ق_1}\| - \|\overline{ق_2}\|$

فإن قياس الزاوية بين $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{4}$ (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) π

(٣٠) إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطى عملهما يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ١٢٠° (جـ) صفر° (د) ٦٠°

(٣١) قياس الزاوية بين $\overline{ق_1}$ ومحصلة القوتين $(\overline{ق_1} + \overline{ق_2})$ ، $(\overline{ق_1} - \overline{ق_2})$ هو ....

(أ) صفر° (ب) π (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

(٣٢) إذا كانت $\overline{ح_1}$ هى محصلة القوتين $(\overline{ق_1} ، \overline{ق_2})$ ، $\overline{ح_2}$ هى محصلة القوتين $(\overline{ق_1} ، -\overline{ق_2})$ ، $\|\overline{ق_1}\| = \|\overline{ق_2}\|$

فإن : ....

(أ) $\overline{ح_1} \perp \overline{ح_2}$ (ب) $\overline{ح_1} = \overline{ح_2}$

(جـ) $\|\overline{ح_1}\| = \|\overline{ح_2}\|$ (د) $\overline{ح_1} // \overline{ح_2}$

(٣٣) قوتان مقداراهما ٤ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠° فإن ظل زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى يساوى ....

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) $2\sqrt{13}$ (د) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(٣٤) قوتان متعامدتان مقداراهما ٦ ، ٨ نيوتن فإن قياس زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى هو ....

(أ) $جا^{-1} \frac{4}{3}$ (ب) $جتا^{-1} \frac{4}{3}$ (جـ) $ظا^{-1} \frac{4}{3}$ (د) $ظا^{-1} \frac{3}{4}$

(٣٥) قوتان مقداراهما $ق$ ، ٢ $ق$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما فإن : $ح$ = ...

(أ) $\sqrt{5}\,ق$ (ب) $\sqrt{3}\,ق$ (جـ) ٣ $ق$ (د) $ق$

(٣٦) قوتان مقداراهما $3\sqrt{2}$ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما = ١٣٥° فإن قياس الزاوية بين محصلتهما والقوة الثانية = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٣٧) قوتان مقداراهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى جسيم وتحصران زاوية قياسها هـ° بحيث $جتا هـ = -\frac{4}{5}$ فإن قياس الزاوية المحصورة بين المحصلة والقوة الأولى = ...

(أ) صفر° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ٥٢ ٣٦°

(٣٨) قوتان تؤثران فى نقطة مادية مقداراهما ٥ ، ٨ نيوتن فإن أصغر قيمة للمحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ١٣

(٣٩) قوتان مقداراهما ٩ نيوتن ، ١٠٠٠ داين فإن القيمة العظمى لمحصلتهما ....

(أ) ١٠٠٩ داين (ب) ١٠٠٩ نيوتن (جـ) ٩,٠١ داين (د) ٩,٠١ نيوتن

(٤٠) قوتان مقداراهما ٥ ، $ق$ نيوتن أصغر مقدار لمحصلتهما ١٠ نيوتن ، $ق$ > ٥ فإن : $ق$ = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

(٤١) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ $ق$ ، ٣ $ق$ فإذا كانت القيمة العظمى لمحصلتهما ٤٠ نيوتن فإن القيمة الصغرى لمحصلتهما .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) صفر

(٤٢) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن

فإن مقدار محصلتهما مقاسة بالنيوتن ∈ ....

(أ) [٢ ، ٨] (ب)]٢ ، ٨[(جـ) [٣ ، ٥] (د)]٣ ، ٥[

(٤٣) إذا كانت ى الزاوية بين قوتين مقداراهما ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ى ∈]٠ ، π[

فإن مقدار محصلة القوتين مقاسة بالنيوتن ∈ ....

(أ)]٤ ، ٨[(ب) [٤ ، ٨] (جـ)]٤ ، ٨] (د) [٤ ، ٨]

(٤٤) قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما ١٦ نيوتن عندما كان قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{2}$

فإن القيمة العظمى لمحصلتيهما تساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٢ (ب) ٨ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٦ $\sqrt{2}$ (د) صفر

(٤٥) قوتان مقداراهما $ق_1$ ، $ق_2$ ث.جم حيث $ق_1 > ق_2$ ومقدار أصغر وأكبر محصلة لهما ٣ ، ١٢ ث.جم على الترتيب فإن : $ق_1^2 - ق_2^2$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٣٦

(٤٦) قوتان مقداراهما ١٢ ، ١٧ نيوتن فإن الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة للمحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٢٩ (ب) ٥ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٤٧) قوتان مقداراهما $ق$ ، $\sqrt{3}$ $ق$ نيوتن متلاقيتان فى نقطة وكان مقدار محصلتهما $ح_1$ عندما كان قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبح مقدار محصلتهما $ح_2$ عندما كان قياس الزاوية بينهما ١٥٠°

فإن : ....

(أ) $ح_1 = ح_2$ (ب) $ح_1 = ٢ ح_2$ (جـ) $ح_1 = \frac{3}{5} ح_2$ (د) $ح_1 = \frac{1}{2} ح_2$

(٤٨) محصلة القوتين فى الشكل المقابل تؤثر فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$

(ب) $\overleftarrow{\text{و س}'}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$

(د) $\overleftarrow{\text{و ص}'}$

(٤٩) قوتان متلاقيتان فى نقطة ومقدار أصغر وأكبر محصلة لهما ٠ ، ١٢ نيوتن على الترتيب فإن القوتين ....

(أ) مقدار إحداهما ثلاث أمثال الأخرى. (ب) مقدار إحداهما ضعف الأخرى.

(جـ) متساويتان فى المقدار. (د) متعامدتان.

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) أوجد مقدار واتجاه محصلة قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ ، ١٥ ث.كجم وتؤثران فى نقطة مادية.

«١٧ ث.كجم ، هـ = ٦١° ٥٥َ ٩ً٤»

(٢) قوتان متعامدتان تؤثران فى نقطة مادية مقدار محصلتهما ٥٠ نيوتن فإذا كانت محصلتهما تميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار كل من القوتين.

«٢٥ $\sqrt{3}$ ، ٢٥ نيوتن»

(٣) قوتان مقداراهما ٣٠ ، ١٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ٢٦ نيوتن. أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

«١٢٠°»

(٤) قوتان مقداراهما ٩ ، ٦ ث.كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ى أوجد قيمة (ى) إذا كانت محصلتهما مقدارها ٣ $\sqrt{7}$ ث.كجم وأوجد قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الكبرى.

«ى = ١٢٠° ، هـ = ٤٠° ٥٣َ ٣ً٦»

(٥) أثرت قوتان فى نقطة مادية فإذا كان مقدار القوة الأولى ١٥ ث.كجم وتؤثر فى اتجاه الشرق ومقدار الثانية ١٨ ث.كجم وتؤثر فى اتجاه ٣٠° غرب الشمال. احسب مقدار واتجاه المحصلة.

«٣ $\sqrt{31}$ ث.كجم ، هـ = ٦٨° ٥٦َ ٥ً٤»

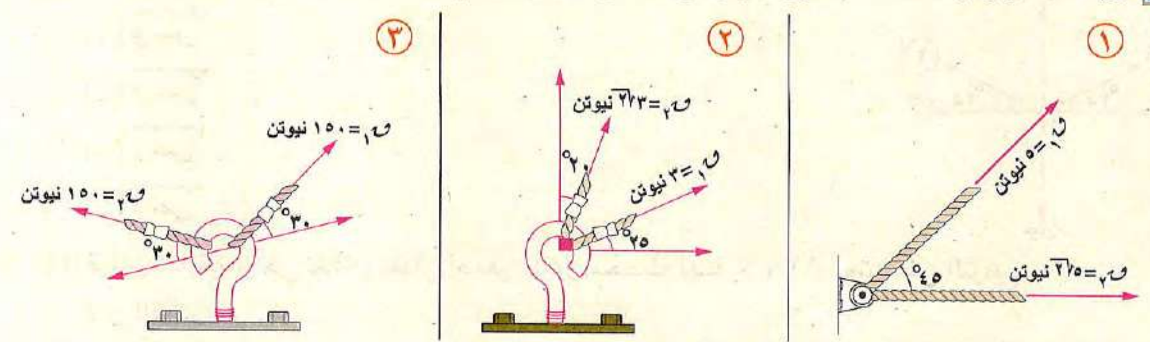
(٦) قوتان مقداراهما ١٢ ، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة ، تعمل الأولى فى اتجاه الشرق وتعمل الثانية فى اتجاه ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار ق ومقدار المحصلة إذا علم أن خط عمل المحصلة يؤثر فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

«٦ ث.كجم ، ٦ $\sqrt{3}$ ث.كجم»

(٧) قوتان تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ى حيث طا ى = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ فإذا علم أن محصلتهما عمودية على صغراهما وأن مقدار القوة الكبرى = ٣٠ ث.كجم فما مقدار كل من القوة الصغرى والمحصلة ؟

«١٥ $\sqrt{3}$ ث.كجم ، ١٥ ث.كجم»

٨ أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المؤثرة فى كل من الأشكال الآتية :



٩ قوتان مقداراهما ق ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٤ √٣ نيوتن فأوجد مقدار ق وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع ق «٨ نيوتن ، ٣٠°»

١٠ قوتان مقداراهما √٣ ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية. أوجد قياس الزاوية بينهما إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الصغرى وإذا كانت ق = ١٥ نيوتن. أوجد مقدار المحصلة. «١٥٠° ، ١٥ نيوتن»

١١ قوتان مقداراهما ٢ √٢ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما √٢ نيوتن فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الثانية. أوجد ق وقياس الزاوية بين القوتين. «√٦ نيوتن ، ١٥٠°»

١٢ قوتان مقداراهما ١٦ ، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت محصلتهما تميل على القوة ١٦ ث.كجم بزاوية قياسها ٣٠° أوجد قيمة ق ومقدار محصلة القوتين. «٨ ، ٨ √٣ ث.كجم»

١٣ إذا أثرت القوى الثلاث التى مقاديرها ٥ ، ١٠ ، ٤ √٧ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية يساوى ٦٠° أوجد القيمة العظمى والصغرى لمقدار محصلة هذه القوى. «٩ √٧ ، √٧ نيوتن»

١٤ قوتان مقداراهما ٢ ق ، ٣ ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما هـ أوجد قيمة هـ إذا كان مقدار محصلتهما :

① ٣ ق
② ق
③ ٥ ق
④ √١٣ ق

«١٠٩ ٢٨ ١٦° ، ١٨٠° ، صفر° ، ٩٠°»

١٥ قوتان مقداراهما ٢ ، ق نيوتن والزاوية بينهما قياسها ١٢٠° أوجد قيمة ق فى كل من الحالتين الآتيتين :

① اتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية.

② اتجاه المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على القوة الثانية. «١ ، √٣ + ١ نيوتن»

١٦ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ق١ ، ق٢ نيوتن ومحصلتهما ح نيوتن حيث ح ∈ [٢ ، ١٠] ، ق١ > ق٢ أوجد قيمتى ق١ ، ق٢ ثم أوجد مقدار المحصلة عندما يكون قياس الزاوية بينهما ١٢٠° «٦ ، ٤ ، ٢ √٧ نيوتن»

١٧ قوتان تؤثران فى نقطة مادية ومقدار إحداهما يزيد عن الأخرى بمقدار ٣ نيوتن ومقدار محصلتهما $٣\sqrt{٣}$ نيوتن فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الصغرى. أوجد مقدار كل من القوتين وقياس الزاوية بينهما.
«٣ ، ٦ نيوتن ، ى = ١٢٠°»

---

١٨ قوتان تؤثران فى نقطة فإذا كانت محصلتهما مقدارها $\sqrt{١٠}$ نيوتن عندما كانت الزاوية بين اتجاهيهما قائمة ويصبح مقدار المحصلة $\sqrt{١٣}$ نيوتن عندما يكون قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين ٦٠° فما مقدار كل من القوتين ؟
«١ ، ٣ نيوتن»

---

١٩ قوتان متساويتان فى المقدار ومتلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ١٢ ث.كجم وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ ث.كجم. أوجد مقدار كل من القوتين.
«$٣\sqrt{٥}$ ، $٣\sqrt{٥}$ ث.كجم»

---

٢٠ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومقدار محصلتهما = ح ث.جم وإذا عكس اتجاه $ق_٢$ فإن مقدار المحصلة يصبح $ح\sqrt{٣}$ ث.جم. **أثبت أن :** $ق_١ = ق_٢$ وأن المحصلة فى الحالة الثانية يكون اتجاهها عموديًا على اتجاه المحصلة فى الحالة الأولى.

---

٢١ قوتان ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وكانت محصلتهما ١٠ نيوتن وتعمل زاوية قياسها ٦٠° مع القوة ٤ نيوتن. **أوجد :** قيمة ق
«$٢\sqrt{١٩}$ نيوتن»

---

٢٢ قوتان متلاقيتان فى نقطة ، الفرق بين مقداريهما ١٥ نيوتن ومقدار محصلتهما = ٣٥ نيوتن عندما يكون قياس الزاوية بينهما ١٢٠° أوجد مقدار كل من القوتين.
«٤٠ ، ٢٥ نيوتن»

---

٢٣ قوتان مجموع مقداريهما ٤ نيوتن. وعندما يكون قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار المحصلة يساوى $\sqrt{١٣}$ نيوتن. أوجد مقدار كل من القوتين.
«١ ، ٣ نيوتن»

---

٢٤ قوتان تؤثران فى نقطة مادية مجموع مقداريهما ٤٠ ث.كجم ومقدار محصلتهما ٢٠ ث.كجم وعمودية على القوة ذات المقدار الأصغر. أوجد مقدار كل من القوتين وجيب تمام الزاوية بينهما.
«١٥ ، ٢٥ ، $-\frac{٣}{٥}$»

---

٢٥ قوتان متساويتان مقدار كل منهما ق ث.كجم تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان وأصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت محصلتهما بمقدار ١١ ث.كجم عن الحالة الأولى. أوجد مقدار ق
«$١ + ٢\sqrt{٣}$»

---

٢٦ ق ، ٢ ق قوتان تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ى ومقدار محصلتهما يساوى $\sqrt{٥}$ ق (م + ١) وإذا أصبح قياس الزاوية بينهما (٩٠° – ى) فإن مقدار المحصلة يساوى $\sqrt{٥}$ ق (م – ١)
أثبت أن : ظا ى = $\frac{م - ٢}{م + ٢}$

ثالثًا / مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت النسبة بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة قوتين كنسبة ٧ : ٣

فإن النسبة بين القوتين = ...

(أ) ٧ : ٤ (ب) ٧ : ٣ (جـ) ٥ : ٣ (د) ٥ : ٢

(٢) إذا كانت النسبة بين مقدارى قوتين ومقدار محصلتهما هى ٤ : ٣ : $\sqrt{١٣}$ على الترتيب

فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠ (جـ) °٩٠ (د) °١٢٠

(٣) إذا كانت محصلة القوتين $\overline{ق}_1$ ، $\overline{ق}_2$ عمودية على $\overline{ق}_1$ فإن قياس الزاوية بين القوتين $\overline{ق}_1$ ، $\overline{ق}_2$

يساوى ....

(أ) جتا$^{-1}$ $\left(\frac{ق_1}{ق_2}\right)$ (ب) جتا$^{-1}$ $\left(\frac{-ق_1}{ق_2}\right)$ (جـ) جا$^{-1}$ $\left(\frac{ق_1}{ق_2}\right)$ (د) جا$^{-1}$ $\left(\frac{-ق_1}{ق_2}\right)$

(٤) إذا كانت محصلة قوتين متعامدتين تميل على القوة الكبرى بزاوية قياسها θ

فأى القيم الآتية تصلح أن تكون قيمة لـ θ ؟

(أ) °٩٠ (ب) °٧٠ (جـ) °٤٥ (د) °١٠

(٥) قوتان $\overline{ق}_1$ ، $\overline{ق}_2$ تؤثران فى نقطة مادية محصلتهما $\overline{ح}$ وإذا عكس اتجاه $\overline{ق}_2$

فإن اتجاه المحصلة يدور بزاوية قياسها °٩٠ فإن : ....

(أ) $ق_1 = ق_2$ (ب) $ق_1 = ٢ ق_2$ (جـ) $ق_1 = \frac{1}{2} ق_2$ (د) لا شىء مما سبق.

(٦) قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة واحدة وقياس الزاوية بينهما °١٢٠

فإن ق التى تجعل المحصلة أصغر ما يمكن تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧) إذا كانت θ_1 هى قياس الزاوية بين محصلة القوتين ($\overline{ق}$ ، $\overline{ق}_2$) والقوة $\overline{ق}_2$ وكانت θ_2 هى قياس الزاوية بين محصلة القوتين ($\overline{ق}$ ، ٢ $\overline{ق}_2$) والقوة $\overline{ق}_2$ فإن : ....

(أ) $\theta_1 = \theta_2$ (ب) $\theta_1 < \theta_2$ (جـ) $\theta_1 > \theta_2$ (د) $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

(٨) قوتان مقداراهما ق ، ق$\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما ق نيوتن فإذا كانت $هـ_1$ هى قياس الزاوية بين ق ، ح وكانت $هـ_2$ هى قياس الزاوية بين ق$\sqrt{٣}$ ، ح فإن : ....

(أ) $هـ_1 = هـ_2$ (ب) $هـ_1 = \frac{1}{2} هـ_2$ (جـ) $هـ_1 = ٣ هـ_2$ (د) $هـ_1 = ٤ هـ_2$

(٩) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ق١ ، ق٢ حيث ٣ ≤ ق١ ≤ ١٢ ، ٤ ≤ ق٢ ≤ ١٦
ومقدار محصلتهما ح وقياس الزاوية بينهما ٩٠° فإن : ....

(أ) ٥ ≤ ح ≤ ٢٠ (ب) ٧ ≤ ح ≤ ٢٨ (جـ) ٠ ≤ ح ≤ ١٨ (د) ١ ≤ ح ≤ ٤

(١٠) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ق١ ، ق٢ حيث ١ ≤ ق١ ≤ ٩ ، ٣ ≤ ق٢ ≤ ٧
ومقدار محصلتهما ح فإن : ....

(أ) ٢ ≤ ح ≤ ١٦ (ب) ٤ ≤ ح ≤ ١٦ (جـ) ٦ ≤ ح ≤ ١٦ (د) ٠ ≤ ح ≤ ١٦

(١١) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ق١ ، ق٢ حيث ٥ ≤ ق١ ≤ ٢٠ ، ١٢ ≤ ق٢ ≤ ٢١ وكان مقدار محصلتهما ح ، قياس الزاوية بينهما θ حيث ٠ ≤ θ ≤ $\frac{\pi}{٢}$ فإن : ....

(أ) ١٣ ≤ ح ≤ ٢٩ (ب) ٠ ≤ ح ≤ ٤١ (جـ) ١٣ ≤ ح ≤ ٤١ (د) ١٧ ≤ ح ≤ ٢٩

---

٢ قوتان الأولى نصف الثانية فى المقدار ولهما محصلة ما فإذا زيد مقدار القوة الأولى بمقدار ٤ ثقل كجم وضوعف مقدار القوة الثانية فإن محصلتهما تظل فى نفس اتجاه المحصلة الأولى.
أوجد مقدار كل من القوتين والنسبة بين محصلتيهما فى الحالتين. «٤ ، ٨ ثقل كجم ، ١ : ٢»

---

٣ $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ متلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما = ح نيوتن وإذا عكس اتجاه $\overline{ق_2}$ فإن المحصلة تصبح ح $\sqrt{٣}$ نيوتن وفى اتجاه عمودى على المحصلة الأولى. أوجد قياس الزاوية بين القوتين. «١٢٠°»



الدرس

2

تحليل القوة إلى مركبتين

تحليل قوة معلومة فى اتجاهين معلومين

نفرض أن لدينا قوة $\overrightarrow{\text{ح}}$ تؤثر فى نقطة مادية (و) ويراد تحليلها إلى مركبتين $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ حيث اتجاه المركبة الأولى يميل على اتجاه $\overrightarrow{\text{ح}}$ بزاوية هـ_1 واتجاه المركبة الثانية يميل على اتجاه $\overrightarrow{\text{ح}}$ بزاوية هـ_2 لذلك نرسم بمقياس رسم المتجه $\overrightarrow{\text{و حـ}}$ ليمثل القوة $\overrightarrow{\text{ح}}$ ثم نرسم من و الشعاعين $\overrightarrow{\text{و س}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ص}}$ يصنعان مع $\overrightarrow{\text{و حـ}}$ وفى اتجاهين مختلفين منه الزاويتين هـ_1 ، هـ_2 ونرسم من حـ موازيين لهذين الشعاعين لنحصل على متوازى الأضلاع و أ حـ ب كما فى الشكل الموضح.

فيكون المتجه $\overrightarrow{\text{و أ}}$ ممثلاً للمركبة $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، والمتجه $\overrightarrow{\text{و ب}}$ ممثلاً للمركبة $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ ويكون المتجه $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ ممثلاً للمركبة $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ أيضًا.

وبتطبيق قانون الجيب على Δ و أ حـ حيث ق (∠ أ حـ و) = هـ_2 يكون :

جا (∠ و أ حـ) = جا [١٨٠° − (هـ_1 + هـ_2)] = جا (هـ_1 + هـ_2)

$$\therefore \quad \frac{\text{ق}_1}{\text{جا هـ}_2} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا هـ}_1} = \frac{\text{ح}}{\text{جا }(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2)}$$

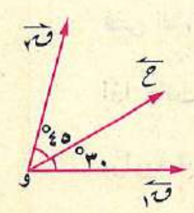
أى أن

ق_1 (مقدار المركبة التى تميل على $\overrightarrow{\text{ح}}$ بزاوية هـ_1) $= \frac{\text{ح} \times \text{جا هـ}_2}{\text{جا }(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2)}$

، ق_2 (مقدار المركبة التى تميل على $\overrightarrow{\text{ح}}$ بزاوية هـ_2) $= \frac{\text{ح} \times \text{جا هـ}_1}{\text{جا }(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2)}$

مثال ١

حل قوة مقدارها ٢٠ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين قياساهما ٣٠° ، ٤٥° فى ناحيتين مختلفتين منها ثم قرب الناتج لأقرب رقم عشرى واحد.

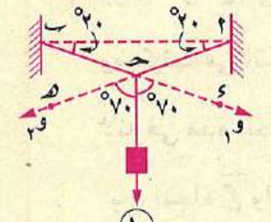


الحل

$ق_1 = \dfrac{ح \text{ جا } هـ_2}{\text{جا}(هـ_1 + هـ_2)} = \dfrac{٢٠ \text{ جا } ٤٥°}{\text{جا } ٧٥°} \simeq ١٤,٦$ نيوتن

، $ق_2 = \dfrac{ح \text{ جا } هـ_1}{\text{جا}(هـ_1 + هـ_2)} = \dfrac{٢٠ \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°} \simeq ١٠,٤$ نيوتن

مثال ٢



فى الشكل المقابل :

مصباح وزنه ١٠ نيوتن معلق بحبلين معدنيين $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بحـ}$ يميلان على الأفقى بزاويتين قياس كل منهما ٢٠°

١ حل وزن المصباح فى الاتجاهين $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$

٢ ماذا يحدث لمقدار مركبة الوزن فى اتجاهى الحبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقى عن ٢٠° ؟ وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يُصبح الحبل المعدنى أفقيًا ؟

الحل

١ قوة الوزن (١٠ نيوتن) تعمل رأسيًا لأسفل.

ومن هندسة الشكل نجد أن : $\dfrac{و_1}{\text{جا } ٧٠°} = \dfrac{و_2}{\text{جا } ٧٠°} = \dfrac{١٠}{\text{جا } ١٤٠°}$

$\therefore و_1 = و_2 = \dfrac{١٠ \text{ جا } ٧٠°}{\text{جا } ١٤٠°} \simeq ١٥$ نيوتن

٢ إذا نقص قياس الزاوية مع الأفقى عن ٢٠° فإن مقدار المركبة يزداد حتى تصبح لا نهائية عندما تكون الحبال أفقية.

تحليل قوة معلومة فى اتجاهين متعامدين

نفرض أن لدينا قوة $\overrightarrow{ح}$ تؤثر فى نقطة مادية (و) ويراد تحليلها إلى مركبتين متعامدتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ حيث اتجاه $\overrightarrow{ق_1}$ يميل على اتجاه $\overrightarrow{ح}$ بزاوية قياسها هـ فى هذه الحالة يؤول متوازى الأضلاع إلى مستطيل، وبتطبيق قانون الجيب على المثلث و أ حـ

يكون : $\dfrac{ق_1}{\text{جا}(٩٠° - هـ)} = \dfrac{ق_2}{\text{جا } هـ} = \dfrac{ح}{\text{جا } ٩٠°}$ $\quad \therefore \dfrac{ق_1}{\text{جتا } هـ} = \dfrac{ق_2}{\text{جا } هـ} = ح$

$\therefore ق_1$ (مقدار المركبة فى الاتجاه المعلوم) = ح جتا هـ

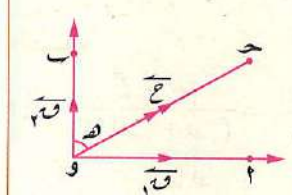
، $ق_2$ (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على الاتجاه المعلوم) = ح جا هـ

وتسمى المركبة $\overrightarrow{ق_1}$ أحيانًا «مسقط $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاه $\overrightarrow{وأ}$» وتسمى المركبة $\overrightarrow{ق_2}$ «مسقط $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاه $\overrightarrow{وب}$»

ملاحظـات

١ مقدار المركبة المجاورة للزاوية المعلومة = ح × جتا (هذه الزاوية)

، مقدار المركبة الأخرى العمودية على المركبة السابقة = ح × جا (هذه الزاوية).



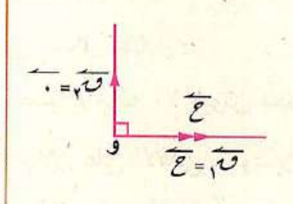
ففى الشكل المقابل :

إذا كانت المركبة $\overrightarrow{ق_١}$ تميل على اتجاه $\overrightarrow{ح}$

بزاوية قياسها هـ فإن : $ق_١$ = ح جتا هـ ، $ق_٢$ = ح جا هـ

٢ مركبة قوة $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاه منطبق على خط عملها = القوة نفسها $\overrightarrow{ح}$

ومركبتها فى اتجاه عمودى على خط عملها = $\overrightarrow{٠}$

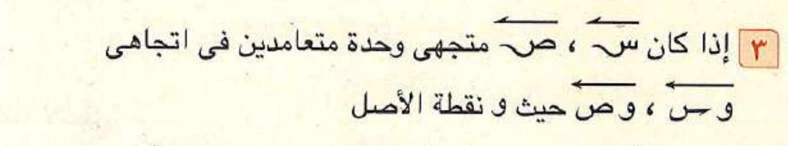


لأنه فى هذه الحالة يكون قياس الزاوية

بين اتجاه $\overrightarrow{ح}$ واتجاه المركبة الأولى = ٠°

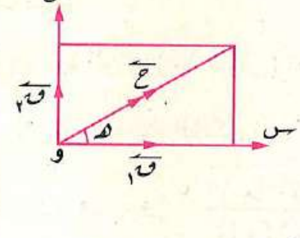
فيكون مقدار المركبة الأولى = ح جتا ٠° = ح × ١ = ح

ومقدار المركبة العمودية على المركبة السابقة = ح جا ٠° = ح × ٠ = صفر



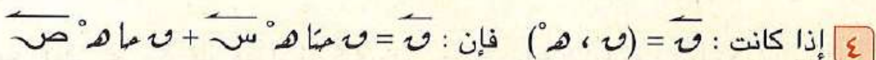
٣ إذا كان $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجهى وحدة متعامدين فى اتجاهى

$\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وص}$ حيث و نقطة الأصل



فإن : $\overrightarrow{ق_١}$ = (ح جتا هـ) $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = (ح جا هـ) $\overrightarrow{ص}$

∴ $\overrightarrow{ح}$ = $\overrightarrow{ق_١}$ + $\overrightarrow{ق_٢}$ = (ح جتا هـ) $\overrightarrow{س}$ + (ح جا هـ) $\overrightarrow{ص}$



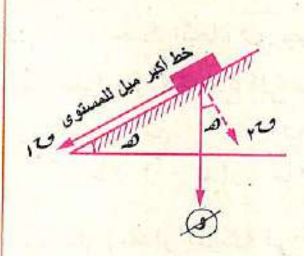
٤ إذا كانت : $\overrightarrow{ق}$ = (ق ، هـ°) فإن : $\overrightarrow{ق}$ = ق جتا هـ° $\overrightarrow{س}$ + ق جا هـ° $\overrightarrow{ص}$

٥ إذا كانت : هـ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [فإن كلًا من مقدارى المركبتين (ح جتا هـ) ، (ح جا هـ) أقل من مقدار القوة (ح) نفسها وذلك لأن هـ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [وبالتالى ٠ > جا هـ > ١ ، ٠ > جتا هـ > ١

٦ إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل على الأفقى

بزاوية قياسها (هـ) فإنه يمكن تحليل الوزن (و) الذى

يؤثر رأسيًا لأسفل إلى مركبتين



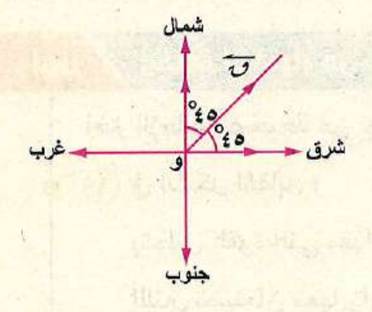
* $ق_١$ (مقدار المركبة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى) = و جا هـ

* $ق_٢$ (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على المستوى) = و جتا هـ

مثال ③

حلّ قوة مقدارها $8\sqrt{2}$ نيوتن تؤثر فى نقطة (و) فى اتجاه الشمال الشرقى إلى مركبتين إحداهما فى اتجاه الشرق والأخرى فى اتجاه الشمال.

الحل



∵ المركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين قياساهما ٤٥° ، ٤٥°
وهما متعامدتان.

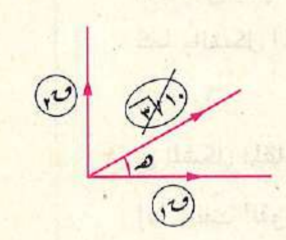
∴ مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ق جتا ٤٥° = $8\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ = ٨ نيوتن.

، مقدار المركبة فى اتجاه الشمال = ق جا ٤٥° = $8\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ = ٨ نيوتن.

مثال ④

حُلّت قوة مقدارها $10\sqrt{3}$ ثقل كجم إلى مركبتين متعامدتين مقدار إحداهما ١٥ ثقل كجم فما مقدار المركبة الأخرى ؟

الحل



نفرض أن اتجاه المركبة المعلومة المقدار ($\overrightarrow{ق_1}$) يميل على اتجاه القوة بزاوية قياسها هـ

∴ مقدار هذه المركبة $ق_1$ = $10\sqrt{3}$ جتا هـ

∴ ١٥ = $10\sqrt{3}$ جتا هـ ∴ جتا هـ = $\frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ هـ = ٣٠°

∴ مقدار المركبة الأخرى $ق_2$ = $10\sqrt{3}$ جا ٣٠° = $10\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$ = $5\sqrt{3}$ ثقل كجم.

حل آخر :

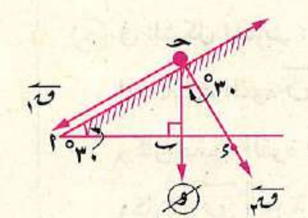
ح = $\sqrt{ق_1^2 + ق_2^2}$ ∴ $(10\sqrt{3})^2 = (15)^2 + ق_2^2$

∴ $ق_2^2$ = ٧٥ ∴ $ق_2$ = $5\sqrt{3}$ ثقل كجم.

مثال ⑤

وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوٍ مائل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار مركبتى وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

الحل



من هندسة الشكل نلاحظ أن : ق (∠ب حـ ء) = ق (∠ب أ حـ) = ٣٠°

∴ $ق_1$ (مقدار المركبة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى)
= و جا ٣٠° = $50 \times \frac{1}{2}$ = ٢٥ نيوتن

، $ق_2$ (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على المستوى) = و جتا ٣٠° = $50 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ = $25\sqrt{3}$ نيوتن.

تمارين 2 على تحليل القوة إلى مركبتين

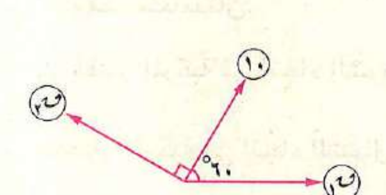
اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى | • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



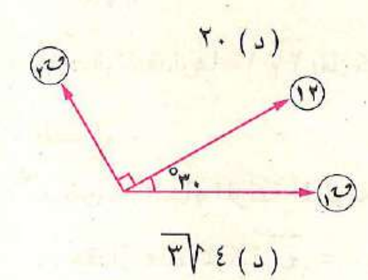
بتحليل القوة التى مقدارها ١٠ نيوتن إلى مركبتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$

اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٩٠° من جهتيها

فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) ٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٠

(٢) إذا حُللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$

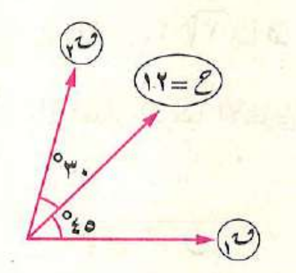


تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠° على الترتيب

كما بالشكل المقابل فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

(٣) فى الشكل المقابل :



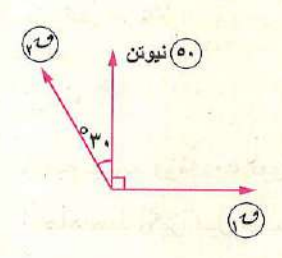
إذا حُللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$

فإن : $ق_١$ = ... نيوتن.

(أ) ١٢ جا ٧٥° (ب) ١٢ جا ٤٥°

(جـ) ٦ قا ٤٥° (د) ٦ قا ٧٥°

(٤) فى الشكل المقابل :



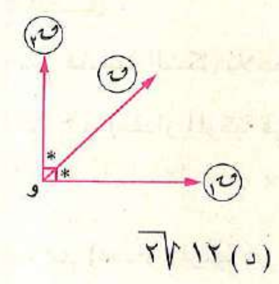
إذا حُللت القوة التى مقدارها ٥٠ نيوتن إلى مركبتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$

فإن : $ق_١ + ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥

(جـ) ٥٠ $\sqrt{٢}$ (د) ٥٠ $\sqrt{٣}$

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا حُللت القوة $\overline{ق}$ إلى المركبتين المتعامدتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$

وكان متجه القوة $\overline{ق}$ ينصف الزاوية بين اتجاهى $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$

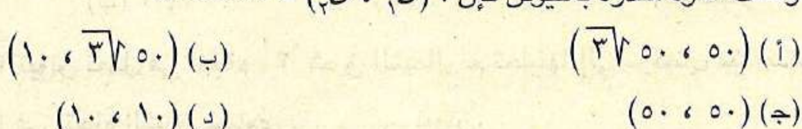
وكان $\|\overline{ق_١}\|$ = ٦ $\sqrt{٢}$ نيوتن فإن : $\|\overline{ق}\|$ = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٢ (د) ١٢ $\sqrt{٢}$

⑥ في الشكل المقابل :

إذا حُللت القوة التى مقدارها ١٠٠ نيوتن إلى قوتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$

وكانت القوة مقدرة بالنيوتن فإن : ($ق_١$ ، $ق_٢$) = ...



(أ) (٥٠ ، ٥٠ √٣)   (ب) (٥٠ √٣ ، ١٠)

(جـ) (٥٠ ، ٥٠)   (د) (١٠ ، ١٠)

⑦ في الشكل المقابل :

قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠ شمال الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشمال = ... نيوتن.

(أ) ١٠ √٣   (ب) ٢٠   (جـ) ١٠   (د) ٥

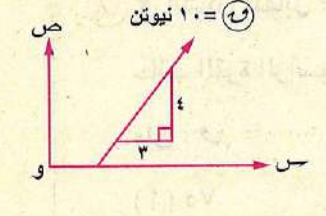
⑧ في الشكل المقابل :

حللت قوة مقدارها ٢٠ √٢ ث.كجم تعمل فى اتجاه الشمال الغربى إلى مركبتين إحداهما مقدارها $ق_١$ نحو الشمال الشرقى والأخرى مقدارها $ق_٢$ نحو الغرب

فإن : $ق_٢$ = ... ث.كجم.

(أ) ٣٠   (ب) ٤٠   (جـ) ٥٠   (د) ٤٠ √٢

⑨ في الشكل المقابل :



إذا تم تحليل القوة $\overline{ق}$ إلى مركبتين فى اتجاهى المحاور الأساسية فإن مركبة هذه القوة فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$ تساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠   (ب) ٦

(جـ) ٨   (د) $\frac{٤٠}{٣}$

⑩ قوة مقدارها ١٠ √٢ ثقل جرام تعمل فى اتجاه الجنوب الشرقى تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه الجنوب = ... ثقل جرام.

(أ) ٥   (ب) ١٠   (جـ) ١٠ √٢   (د) ٥ √٢

⑪ 📖 قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) صفر   (ب) ٣   (جـ) ٣ √٢   (د) ٦

⑫ 📖 قوة مقدارها ٤ √٢ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى = ... نيوتن.

(أ) صفر   (ب) ٤ √٢   (جـ) ٤   (د) ٦

(١٣) قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) $٣\sqrt{٢}$ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) صفر

(١٤) قوة مقدارها $٥\sqrt{٣}$ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشرق يساوى .... نيوتن.

(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥}{٢}$ (جـ) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $١٥\sqrt{٣}$

(١٥) قوة مقدارها ٨ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق ثم تحليلها إلى مركبتين قياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإن مركبتها فى اتجاه الجنوب = ... نيوتن.

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) $٨\sqrt{٣}$ (د) $\frac{٨\sqrt{٣}}{٣}$

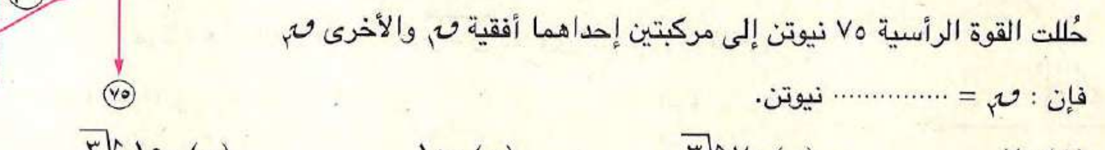
(١٦) قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية مقدارها ٢٠ نيوتن فإن مقدار القوة الأخرى = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) $٢٠\sqrt{٣}$ (جـ) $٢٠\sqrt{٥}$ (د) $١٠\sqrt{٣}$

(١٧) بتحليل القوة التى مقدارها ق نيوتن إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٩٠° من جهتين مختلفتين لخط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$ على الترتيب فإن $ق_١$ = ...

(أ) $٢ ق_٢$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢} ق_٢$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}} ق_٢$ (د) $\frac{١}{٢} ق_٢$

(١٨) فى الشكل المقابل :

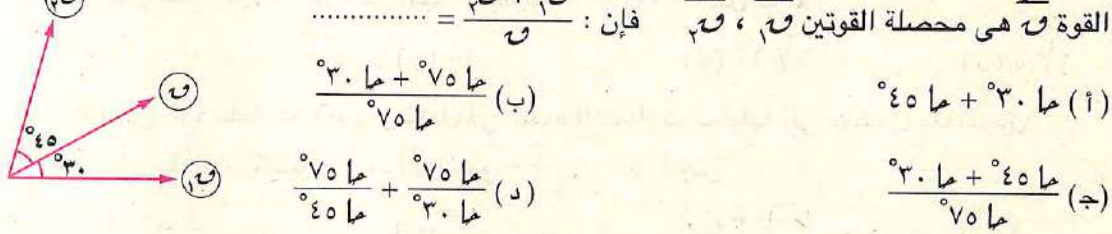


حُللت القوة الرأسية ٧٥ نيوتن إلى مركبتين إحداهما أفقية $ق_١$ والأخرى $ق_٢$

فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) ٧٥ (ب) $٧٥\sqrt{٣}$ (جـ) ١٥٠ (د) $١٥٠\sqrt{٣}$

(١٩) فى الشكل المقابل :



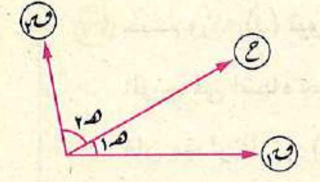
القوة $\overrightarrow{ق}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فإن : $\frac{ق_١ + ق_٢}{ق}$ = ...

(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥° (ب) $\frac{\text{جا } ٧٥° + \text{جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°}$

(جـ) $\frac{\text{جا } ٤٥° + \text{جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°}$ (د) $\frac{\text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٣٠°} + \frac{\text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٤٥°}$

(٢٠) أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{أء}$ فإن مقدار مركبتى القوة فى اتجاهى $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب هما ....

(أ) $١٠\sqrt{٣}$ ، ١٠ (ب) $٥\sqrt{٣}$ ، ١٠ (جـ) ١٠ ، $١٠\sqrt{٣}$ (د) $٢٠\sqrt{٣}$ ، ٢٠

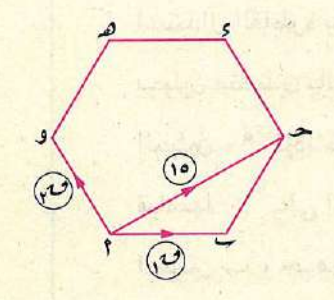


(٢١) فى الشكل المقابل :

حُللت القوة $\overrightarrow{ح}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

فإن : $\frac{ق_١}{ق_٢}$ = ...

(أ) $\frac{جا هـ_٢}{جا هـ_١}$ (ب) جا $\frac{هـ_٢}{هـ_١}$ (جـ) جا (هـ٢ + هـ١) (د) $\frac{جا هـ_١}{جا هـ_٢}$



(٢٢) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوة ١٥ نيوتن فى $\overleftarrow{أ حـ}$

وحُللت إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ كما بالشكل

فإن : ق١ : ق٢ = ...

(أ) $\sqrt{٣}$: ٢ (ب) ٢ : ١

(جـ) ١ : ٢ (د) ١ : $\sqrt{٣}$

(٢٣) فى الشكل المقابل :

إذا وضع جسم وزنه ١٠ نيوتن على مستوى مائل أملس

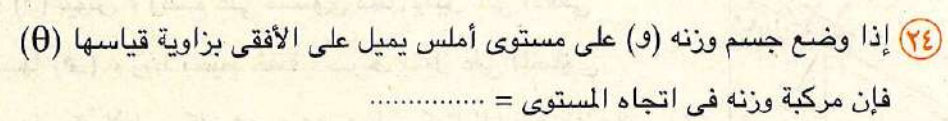
يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مركبة وزن الجسم

فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل = ... نيوتن.



(أ) ٥ $\sqrt{٢}$ (ب) ٥ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٥ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$



(٢٤) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها (θ)

فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى = ...

(أ) و (ب) و جا θ (جـ) و جتا θ (د) و ظا θ

(٢٥) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ)

فإن مقدار مركبة وزنه فى اتجاه عمودى على المستوى هى ....

(أ) و جا هـ (ب) و جتا هـ (جـ) و ظا هـ (د) و قتا هـ

(٢٦) إذا وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الرأسى بزاوية قياسها (هـ)

فإن مركبة وزن الجسم فى اتجاه المستوى هى ....

(أ) و جا هـ (ب) و جتا هـ (جـ) و (د) و ظا هـ

(٢٧) جسم وزنه (و) نيوتن موضوع على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كانت مركبتا الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه مقداراهما ٧ ، ٢٤ نيوتن على الترتيب فإن مقدار الوزن (و) = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٢٤ (ج) ٢٥ (د) ٣١

(٢٨) قاطرة تجر سيارة بقوة ١٢٠٠ نيوتن يراد استبدال القاطرة بقاطرتين عند ب ، حـ مثبتتين بحبلين متصلين بالسيارة وكان قياس الزاوية بين الحبلين ٩٠° فإذا كان أحد الحبلين يميل بزاوية قياسها ٦٠° على القاطرة أ فإن مقدار الشد فى كل من الحبلين ب ، حـ هو .... نيوتن.

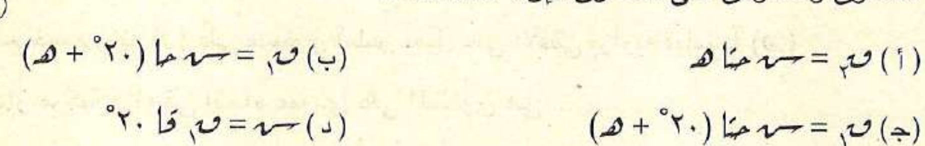
(أ) ٦٠٠ ، ٦٠٠ (ب) ٨٠٠ ، ٤٠٠ (ج) ٦٠٠ $\sqrt{3}$ ، ٦٠٠ (د) ٧٠٠ ، ٥٠٠

(٢٩) تعطلت سيارة نقل كبيرة فقام رجال المرور بإحضار سيارتين لسحب هذه السيارة بحيث كانت محصلة قوى الشد للسيارتين تمثل بقوة أفقية مقدارها ٦٠٠٠ نيوتن كما بالشكل فإن : ش٢ = ... لأقرب نيوتن.

(أ) ٣١٠٥ (ب) ٣٦٠٦ (ج) ٤٣٩٢ (د) ٤٢٩٣

(٣٠) فى الشكل المقابل :

جسم وزنه (و) نيوتن ، وضع على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) ، ربط بخيط خفيف بحـ يميل على المستوى بزاوية قياسها ٢٠° لأعلى وكان ش١ ، ش٢ هما مركبتا الشد فى اتجاه المستوى والعمودى على المستوى فإن : ....



(أ) ش٢ = ش جتا هـ (ب) ش١ = ش جا (٢٠° + هـ)

(ج) ش١ = ش جتا (٢٠° + هـ) (د) ش = ش١ قا ٢٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) قوة مقدارها ٦٠٠ ث.جم تؤثر فى نقطة مادية. أوجد مركبتيها فى اتجاهين يصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٤٥° «٤٣٩,٢ ، ٣١٠,٦ ث.جم»

٢ قوة مقدارها ١٠٠ ثقل جم تعمل فى اتجاه الشمال الغربى. احسب مركبتيها فى اتجاهى الشمال والغرب.
«$٥٠\sqrt{٢}$ ، $٥٠\sqrt{٢}$ ث.جم»

٣ حللت قوة مقدارها ١٢ ث.كجم تؤثر فى اتجاه الشمال الشرقى إلى مركبتين إحداهما نحو الشرق والأخرى نحو الشمال الغربى. أوجد مقدار هاتين المركبتين.
«$١٢\sqrt{٢}$ ، ١٢ ث.كجم»

٤ حلّل قوة أفقية مقدارها ١٦٠ ث.جم فى اتجاهين متعامدين أحدهما يميل على الأفقى بزاوية قياسها °٣٠ إلى أعلى.
«$٨٠\sqrt{٣}$ ، ٨٠ ث.جم»

٥ قوة مقدارها ٣٠٠ داين تؤثر فى اتجاه الشمال. أوجد مقدار مركبتيها المتعامدتين إذا كانت إحدى هاتين المركبتين تعمل فى اتجاه شمال الشرق بزاوية قياسها °٣٠
«١٥٠ ، $١٥٠\sqrt{٣}$ داين»

٦ قوة مقدارها ١٨ نيوتن تعمل فى اتجاه الجنوب. أوجد مركبتيها فى اتجاهى °٦٠ شرق الجنوب ، °٣٠ غرب الجنوب.
«٩ ، $٩\sqrt{٣}$ نيوتن»

٧ حلّل قوة قدرها ٩٠ نيوتن إلى قوتين متساويتين فى المقدار وقياس الزاوية بين اتجاهيهما °٦٠
«$٣٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

٨ أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين ، لوزن جسم موضوع على مستوٍ أفقى ومقداره ٨٠ نيوتن إذا علم أن إحداهما تميل على الأفقى بزاوية قياسها °٣٠ إلى أسفل.
«٤٠ ، $٤٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

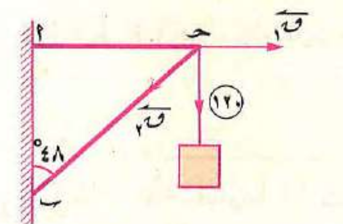
٩ قوتان تؤثران فى نقطة وظل الزاوية بينهما يساوى $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ، إذا علم أن محصلتهما عمودية على الصغرى وأن مقدار المركبة الكبرى يساوى ٣٠ نيوتن. فما هو مقدار كل من المركبة الأخرى والمحصلة ؟ «$١٥\sqrt{٣}$ ، ١٥ نيوتن»

١٠ حلل قوة مقدارها ق نيوتن فى اتجاه الشمال إلى مركبتين ، الأولى فى اتجاه °٣٠ شمال الشرق ومقدارها ٤٠ نيوتن والثانية فى اتجاه الغرب. **أوجد كلًا من :** مقدار القوة ق ومقدار المركبة الثانية. «٢٠ ، $٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

١١ جسم جاسئ وزنه ٤٢ نيوتن موضوع على مستوٍ يميل على الأفقى بزاوية قياسها °٦٠ أوجد مركبتى وزن هذا الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.
«٢١ ، $٢١\sqrt{٣}$ نيوتن»

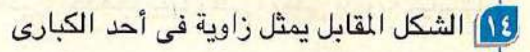
١٢ جسم وزنه ٦٠ نيوتن موضوع على مستوٍ مائل يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث طا هـ = $\frac{٣}{٤}$ أوجد مقدار مركبتى الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.
«٣٦ ، ٤٨ نيوتن»

١٣ في الشكل المقابل :



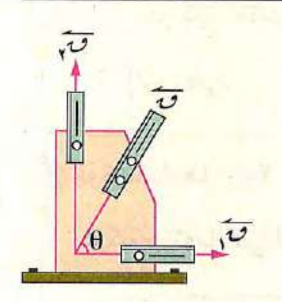
حلل القوة الرأسية ١٢٠ ث.جم إلى مركبتين إحداهما في الاتجاه الأفقي والأخرى في اتجاه يصنع مع خط عمل القوة زاوية قياسها ٤٨°

«١٣٣,٢٧ ، ١٧٩,٣٤ ث.جم»



١٤ الشكل المقابل يمثل زاوية في أحد الكباري ، القوة $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٣٠ نيوتن ، حُللت إلى مركبتين متعامدتين مقدار إحداهما $١٥\sqrt{٣}$ نيوتن.

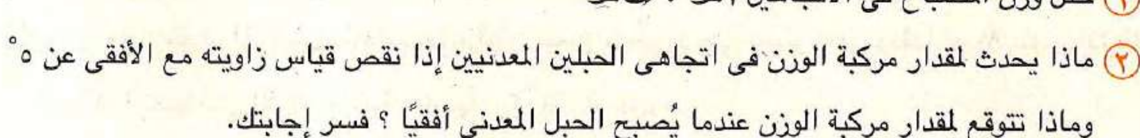
فأوجد مقدار المركبة الأخرى.



«١٥ نيوتن»

١٥ في الشكل المقابل :

مصباح وزنه ٢٠ نيوتن معلق بحبلين معدنيين $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بحـ}$ يميلان على الأفقي بزاويتين متساويتين قياس كل منهما ٥°



(١) حلل وزن المصباح في الاتجاهين $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$

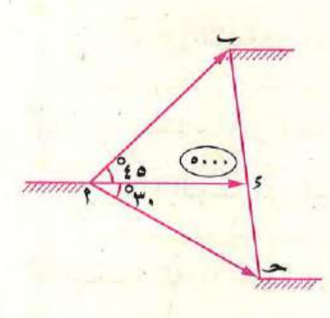
(٢) ماذا يحدث لمقدار مركبة الوزن في اتجاهي الحبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقي عن ٥° وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يُصبح الحبل المعدني أفقيًا ؟ فسر إجابتك.

«١١٤,٧٤ ، ١١٤,٧٤ نيوتن»

١٦ مستوى مائل طوله ١٣٠ سم وارتفاعه ٥٠ سم وضع عليه جسم جاسئ وزنه ٣٩٠ ث.جم.

أوجد مركبتي الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه. «١٥٠ ، ٣٦٠ ث.جم»

١٧ في الشكل المقابل :



يراد سحب بارجة بواسطة قاطرتين ب ، حـ تتصلان بحبلين مثبتين في خُطاف في نقطة أ من البارجة وقياس الزاوية بينهما ٧٥° ، فإذا كان قياس زاوية ميل أحد الحبلين على $\overrightarrow{أء}$ يساوي ٤٥° وكانت محصلة القوى المبذولة لسحب البارجة تساوي ٥٠٠٠ نيوتن وتعمل في اتجاه $\overleftarrow{أء}$.

أوجد الشد في كل من الحبلين.

«٢٥٨٨,٢ ، ٣٦٦٠,٣ نيوتن»



الدرس

3

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة

١ الطريقة الهندسية

نفرض أن لدينا مجموعة من القوى المستوية $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ ، $\overrightarrow{ق}_3$ ، $\overrightarrow{ق}_4$ تؤثر فى نقطة م كما فى الشكل المقابل :

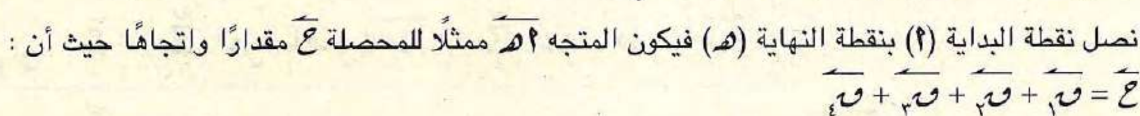
فلإيجاد محصلة مجموعة هذه القوى نتبع الخطوات الآتية :

* نختار مقياس رسم مناسب.
* من أى نقطة مثل أ نرسم المتجه $\overrightarrow{أب}$ ليمثل $\overrightarrow{ق}_1$ (مقدارًا واتجاهًا)
* من نقطة ب نرسم المتجه $\overrightarrow{بحـ}$ ليمثل $\overrightarrow{ق}_2$
* من نقطة حـ نرسم المتجه $\overrightarrow{حـ ء}$ ليمثل $\overrightarrow{ق}_3$
* وأخيرًا من نقطة ء نرسم المتجه $\overrightarrow{ء هـ}$ ليمثل $\overrightarrow{ق}_4$

نصل نقطة البداية (أ) بنقطة النهاية (هـ) فيكون المتجه $\overrightarrow{أهـ}$ ممثلًا للمحصلة $\overrightarrow{ح}$ مقدارًا واتجاهًا حيث أن :

$$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2 + \overrightarrow{ق}_3 + \overrightarrow{ق}_4$$

* نقيس طول $\overline{أهـ}$ ونوجد ق (د هـ أ ب) لتكون زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى وباستخدام مقياس الرسم نحصل على مقدار $\overrightarrow{ح}$



* فتكون محصلة مجموعة القوى هى قوة مقدارها ح تؤثر فى نقطة م فى اتجاه $\overrightarrow{أهـ}$

مع ملاحظة أن :

المتجه $\overrightarrow{أهـ}$ الذى يمثل $\overrightarrow{ح}$ يكون اتجاهه فى عكس الاتجاه الدورى لباقى المتجهات التى تمثل القوى والمضلع أ ب حـ ء هـ الذى أضلاعه تمثل القوى ومحصلتها يسمى «مضلع القوى».

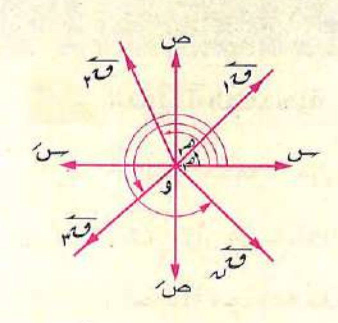
ملاحظـــة

إذا انطبقت نقطة نهاية خط عمل القوة الأخيرة مع نقطة بداية خط عمل القوة الأولى فى مضلع القوى فإن المحصلة $(\overrightarrow{ح}) = \overrightarrow{0}$ وبالتالى تكون مجموعة القوى متزنة.

أى أن الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة هو أن تمثل هذه القوى هندسيًا بأضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى اتجاه دورى واحد.

٢ الطريقة التحليلية

نفرض أن لدينا مجموعة من القوى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ، ... ، $\overrightarrow{ق_ن}$ المستوية والمتلاقية فى نقطة (و) واعتبرنا أن النقطة (و) هى نقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد فى هذا المستوى وكانت $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$ ، ... ، $هـ_ن$ هى الزوايا القطبية للقوى وكان $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ هما متجها الوحدة فى اتجاهى $\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وص}$ فإن :



$$\overrightarrow{ق_1} = (ق_1 ، هـ_1) = ق_1 \text{ حتا } هـ_1 \overrightarrow{س} + ق_1 \text{ حا } هـ_1 \overrightarrow{ص}$$

$$، \overrightarrow{ق_2} = (ق_2 ، هـ_2) = ق_2 \text{ حتا } هـ_2 \overrightarrow{س} + ق_2 \text{ حا } هـ_2 \overrightarrow{ص}$$

$$، \overrightarrow{ق_3} = (ق_3 ، هـ_3) = ق_3 \text{ حتا } هـ_3 \overrightarrow{س} + ق_3 \text{ حا } هـ_3 \overrightarrow{ص}$$

$$\vdots$$

$$، \overrightarrow{ق_ن} = (ق_ن ، هـ_ن) = ق_ن \text{ حتا } هـ_ن \overrightarrow{س} + ق_ن \text{ حا } هـ_ن \overrightarrow{ص}$$

$$، \because \overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3} + \dots + \overrightarrow{ق_ن}$$

فبالجمع ينتج أن : $\overrightarrow{ح} = (ق_1 \text{ حتا } هـ_1 \overrightarrow{س} + ق_1 \text{ حا } هـ_1 \overrightarrow{ص}) + (ق_2 \text{ حتا } هـ_2 \overrightarrow{س} + ق_2 \text{ حا } هـ_2 \overrightarrow{ص}) + \dots + (ق_ن \text{ حتا } هـ_ن \overrightarrow{س} + ق_ن \text{ حا } هـ_ن \overrightarrow{ص})$

$$= (ق_1 \text{ حتا } هـ_1 + ق_2 \text{ حتا } هـ_2 + \dots + ق_ن \text{ حتا } هـ_ن) \overrightarrow{س}$$

$$+ (ق_1 \text{ حا } هـ_1 + ق_2 \text{ حا } هـ_2 + \dots + ق_ن \text{ حا } هـ_ن) \overrightarrow{ص}$$

أى أن $\overrightarrow{ح} = (\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر \text{ حتا } هـ_ر) \overrightarrow{س} + (\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر \text{ حا } هـ_ر) \overrightarrow{ص}$

والمقدار $(\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر \text{ حتا } هـ_ر)$ يسمى المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$ ونرمز له بالرمز $س$

، المقدار $(\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر \text{ حا } هـ_ر)$ يسمى المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overrightarrow{وص}$ ونرمز له بالرمز $ص$

وعلى ذلك نكتب العلاقة السابقة بالصورة : $\overrightarrow{ح} = س \overrightarrow{س} + ص \overrightarrow{ص}$

وبفرض أن ح هى مقدار المحصلة $\overrightarrow{ح}$ ، هـ هى قياس الزاوية القطبية لها

فإن : $ح = \sqrt{س^2 + ص^2}$ ، $\text{طا } هـ = \frac{ص}{س}$ حيث $\overrightarrow{ح} = (ح ، هـ)$

ملاحظات

١ لاحظ الفرق بين : س ، $\overleftarrow{\text{س}}$

* س = مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$
* $\overleftarrow{\text{س}}$ = متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

٢ إذا كانت : $\boxed{\text{س} = \text{صفر}}$ فإن : $\boxed{\overleftarrow{\text{ح}} = \text{ص}\ \overleftarrow{\text{ص}}}$

وتكون $\text{هـ} = ٩٠^\circ$ إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

، $\text{هـ} = ٢٧٠^\circ$ إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}'}$

٣ إذا كانت : $\boxed{\text{ص} = \text{صفر}}$ فإن : $\boxed{\overleftarrow{\text{ح}} = \text{س}\ \overleftarrow{\text{س}}}$

وتكون $\text{هـ} = \text{صفر}^\circ$ إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، $\text{هـ} = ١٨٠^\circ$ إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}'}$

٤ إذا كانت : $\boxed{\text{س} = \text{صفر}}$ ، $\boxed{\text{ص} = \text{صفر}}$ فإن : $\boxed{\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{٠}}$

وفى هذه الحالة تكون مجموعة القوى متزنة.

٥ عند تعيين اتجاه المحصلة يراعى ما يلى :

س	ص	الربع	هـ
+	+	الأول	قياس الزاوية الحادة
−	+	الثانى	١٨٠° − قياس الزاوية الحادة
−	−	الثالث	١٨٠° + قياس الزاوية الحادة
+	−	الرابع	٣٦٠° − قياس الزاوية الحادة

٦ محصلة عدة قوى $\overleftarrow{\text{ق}_١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٣}$ هى : $\boxed{\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_١} + \overleftarrow{\text{ق}_٢} + \overleftarrow{\text{ق}_٣}}$

وإذا كان $\boxed{\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{٠}}$ فإن مجموعة القوى تكون متزنة

فمثلًا : إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ق}_١} = ٥\ \overleftarrow{\text{س}} + ٢\ \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢} = -٦\ \overleftarrow{\text{س}} + ٣\ \overleftarrow{\text{ص}}$

، $\overleftarrow{\text{ق}_٣} = \overleftarrow{\text{س}} - ٥\ \overleftarrow{\text{ص}}$ فإن : $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_١} + \overleftarrow{\text{ق}_٢} + \overleftarrow{\text{ق}_٣} = \overleftarrow{٠}$

∴ القوى تكون متزنة.

مثال ١

إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق_1} = ٥ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = -٦ \overrightarrow{س} + أ \overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_3} = ب \overrightarrow{س} + ٧ \overrightarrow{ص}$ متلاقية فى نقطة ومتزنة **أوجد قيمة كل من : أ ، ب**

الحــل

∵ القوى متزنة. ∴ $\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3} = \overrightarrow{٠}$

∴ $(٥ \overrightarrow{س} - ٤ \overrightarrow{ص}) + (-٦ \overrightarrow{س} + أ \overrightarrow{ص}) + (ب \overrightarrow{س} + ٧ \overrightarrow{ص}) = \overrightarrow{٠}$

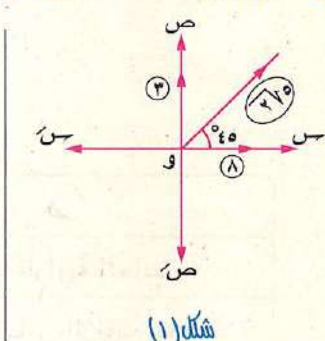
∴ $(-١ + ب) \overrightarrow{س} + (٣ + أ) \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{٠}$ ∴ $-١ + ب = ٠$

∴ $ب = ١$ ، $٣ + أ = ٠$ ∴ $أ = -٣$

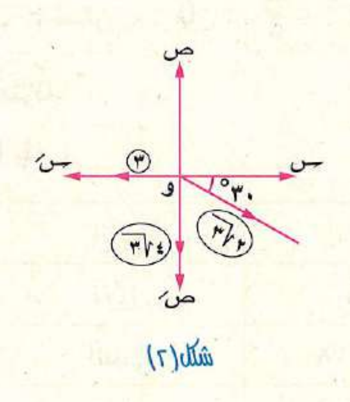
مثال ٢

فى كل من الأشكال الثلاثة التالية مجموعة من القوى متلاقية فى (و) ومقدرة بوحدة النيوتن.

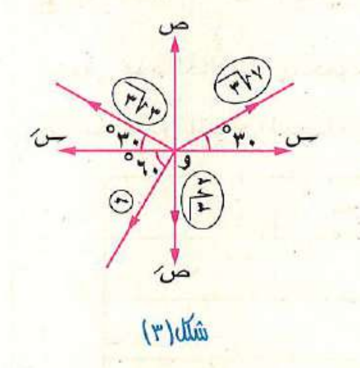
عيِّن مقدار واتجاه محصلة كل منها.



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحــل

فى شكل (١) :

القوى الثلاث مقاديرها ٨ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٣ نيوتن وزواياها القطبية ٠° ، ٤٥° ، ٩٠°

على الترتيب والمجموع الجبرى للمركبات فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$

أى س = ٨ جتا ٠° + ٥ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٣ جتا ٩٠°

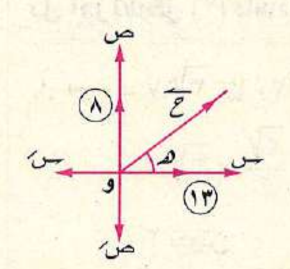
$= ٨ \times ١ + ٥\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٣ \times$ صفر $= ٨ + ٥ + ٠ = ١٣$ نيوتن.

، المجموع الجبرى للمركبات فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

أى ص = ٨ جا ٠° + ٥ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٣ جا ٩٠°

$= ٨ \times ٠ + ٥\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٣ \times ١ = ٠ + ٥ + ٣ = ٨$ نيوتن.

∴ $\overline{ح} = ١٣ \overline{س} + ٨ \overline{ص}$



ويكون ح = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{١٦٩ + ٦٤} = \sqrt{٢٣٣}$

∴ ح ≃ ١٥,٢٦٤ نيوتن ، طا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{٨}{١٣}$ ، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

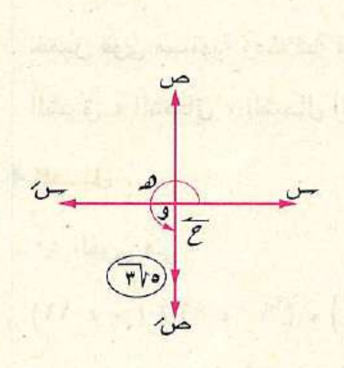
∴ $\overline{ح}$ تقع فى الربع الأول وباستخدام حاسبة الجيب ∴ هـ ≃ ٣١° ٣٦َ

∴ $\overline{ح}$ مقدارها ١٥,٢٦٤ نيوتن وقياس زاويتها القطبية ٣١° ٣٦َ

فى شكل (٢) : ثلاث قوى مقاديرها ٣ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن وزواياها القطبية هى ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٣٠° على الترتيب.

∴ س = ٣ حتا ١٨٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ حتا ٢٧٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ حتا ٣٣٠°

$= ٣ \times (-١) + ٤\sqrt{٣} \times ٠ + ٢\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -٣ + ٠ + ٣ = ٠$



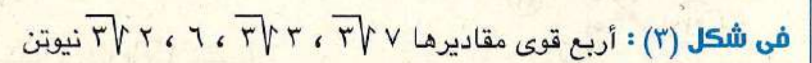
، ص = ٣ حا ١٨٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ حا ٢٧٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ حا ٣٣٠°

∴ ص $= ٣ \times ٠ + ٤\sqrt{٣} \times (-١) + ٢\sqrt{٣} \times (-\frac{١}{٢})$

$= ٠ - ٤\sqrt{٣} - \sqrt{٣} = -٥\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ $\overline{ح} = -٥\sqrt{٣}\ \overline{ص}$

ويكون ح = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، هـ = ٢٧٠°



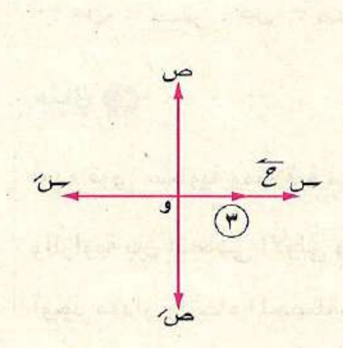
فى شكل (٣) : أربع قوى مقاديرها ٧ $\sqrt{٣}$ ، ٣ $\sqrt{٣}$ ، ٦ ، ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن وزواياها القطبية هى ٣٠° ، ١٥٠° ، ٢٤٠° ، ٢٧٠° على الترتيب.

∴ س = ٧ $\sqrt{٣}$ حتا ٣٠° + ٣ $\sqrt{٣}$ حتا ١٥٠° + ٦ حتا ٢٤٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ حتا ٢٧٠°

$= ٧\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٣\sqrt{٣} \times (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) + ٦ \times (-\frac{١}{٢}) + ٢\sqrt{٣} \times ٠$

$= ١٠,٥ - ٤,٥ - ٣ + ٠ = ٣$ نيوتن.

، ص = ٧ $\sqrt{٣}$ حا ٣٠° + ٣ $\sqrt{٣}$ حا ١٥٠° + ٦ حا ٢٤٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ حا ٢٧٠°

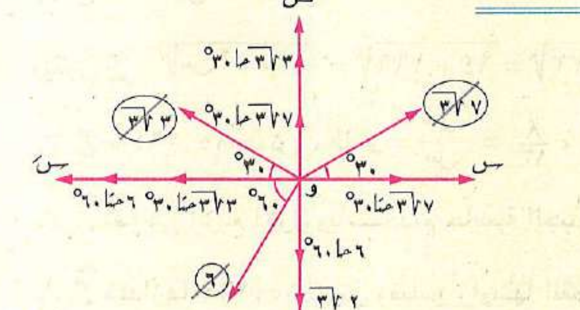


∴ ص $= ٧\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ٣\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ٦ \times (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) + ٢\sqrt{٣} \times (-١)$

$= \frac{٧\sqrt{٣}}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - ٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} =$ صفر

∴ $\overline{ح} = ٣ \overline{س}$ وتكون ح = ٣ نيوتن ، هـ = ٠°

حل آخر لشكل (٣) باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين :



∴ س = ٧$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° − ٣$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° − ٦ جتا ٦٠°

= ٧$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − ٣$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − ٦ × $\frac{١}{٢}$

= ٣ نيوتن.

، ص = ٣$\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٧$\sqrt{٣}$ جا ٣٠° − ٦ جا ٦٠° − ٢$\sqrt{٣}$

= ٣$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٧$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ − ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − ٢$\sqrt{٣}$ = صفر

∴ ح = $\sqrt{(٣)^٢ + (٠)^٢}$ = ٣ نيوتن ، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{صفر}{٣}$ = صفر ∴ هـ = ٠°

مثال ٣

خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ٥$\sqrt{٢}$ ، ٧$\sqrt{٢}$ ، ٧ ث.كجم. تعمل فى اتجاهات : الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى متزنة.

الحـــل

∵ القوى هى :

(١٢ ، ٠°) ، (٩ ، ٩٠°) ، (٥$\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°) ، (٧$\sqrt{٢}$ ، ٢٢٥°) ، (٧ ، ٢٧٠°)

∴ س = ١٢ جتا ٠° + ٩ جتا ٩٠° + ٥$\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

+ ٧$\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥° + ٧ جتا ٢٧٠°

= ١٢ × ١ + صفر + ٥$\sqrt{٢}$ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}}\right)$ + ٧$\sqrt{٢}$ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}}\right)$ + صفر

= ١٢ − ٥ − ٧ = صفر

، ص = ١٢ جا ٠° + ٩ جا ٩٠° + ٥$\sqrt{٢}$ جا ١٣٥° + ٧$\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥° + ٧ جا ٢٧٠°

= صفر + ٩ × ١ + ٥$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٧$\sqrt{٢}$ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}}\right)$ + ٧ (−١) = ٩ + ٥ − ٧ − ٧ = صفر

∵ س = صفر ، ص = صفر ∴ $\overline{ح} = \overline{٠}$ ∴ المجموعة متزنة.

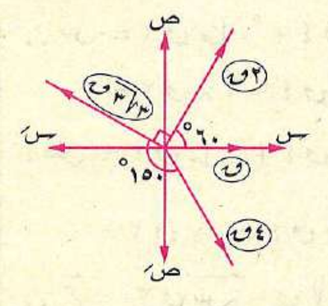
مثال ٤

أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ق ، ٢ ق ، ٣$\sqrt{٣}$ ق ، ٤ ق ث.كجم

والزاوية بين اتجاهى الأولى والثانية ٦٠° وبين اتجاهى الثانية والثالثة ٩٠° وبين اتجاهى الثالثة والرابعة ١٥٠°

أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

الحـــل



نعتبر $\overleftarrow{\text{و س}}$ هو اتجاه القوة الأولى فتكون القوى فى الصورة القطبية :

(ق ، ٠°) ، (٢ ق ، ٦٠°) ، (٣ $\sqrt{٣}$ ق ، ١٥٠°)

، (٤ ق ، ٣٠٠°) على الترتيب.

$$\therefore \text{س} = \text{ق جتا } ٠° + ٢ \text{ ق جتا } ٦٠° + ٣\sqrt{٣} \text{ ق جتا } ١٥٠°$$

$$+ ٤ \text{ ق جتا } ٣٠٠° = \text{ق} \times ١ + ٢ \text{ ق} \times \frac{١}{٢} + ٣\sqrt{٣} \text{ ق} \left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) + ٤ \text{ ق} \times \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{س} = \text{ق} + \text{ق} - \frac{٩}{٢} \text{ ق} + ٢ \text{ ق} = -\frac{١}{٢} \text{ ق}$$

$$، \text{ص} = \text{ق جا } ٠° + ٢ \text{ ق جا } ٦٠° + ٣\sqrt{٣} \text{ ق جا } ١٥٠° + ٤ \text{ ق جا } ٣٠٠°$$

$$= \text{ق} \times ٠ + ٢ \text{ ق} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٣\sqrt{٣} \text{ ق} \times \frac{١}{٢} + ٤ \text{ ق} \times \left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$$

$$= ٠ + \sqrt{٣} \text{ ق} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} \text{ ق} - ٢\sqrt{٣} \text{ ق} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \text{ ق}$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ح}} = -\frac{١}{٢} \text{ ق } \overleftarrow{\text{س}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \text{ ق } \overleftarrow{\text{ص}}$$

$$\therefore \text{ح} = \sqrt{\frac{١}{٤} \text{ق}^٢ + \frac{٣}{٤} \text{ق}^٢} = \sqrt{\text{ق}^٢} \qquad \therefore \text{ح} = \text{ق}$$

$$، \text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{٣} \text{ ق}}{٢} \times -\frac{٢}{\text{ق}} = -\sqrt{٣}$$

$$، \because \text{س} < ٠ ، \text{ص} > ٠ \qquad \therefore \text{هـ} = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°$$

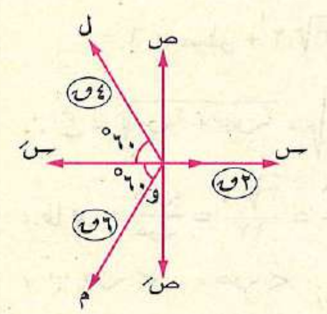
أى أن المحصلة مقدارها ق وتقع بين القوتين الثانية والثالثة وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع القوة الثالثة.

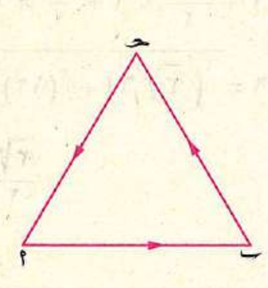
- **حاول حل هذا المثال باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين.**

مثال ٥

ثلاث قوى مقاديرها ٢ ق ، ٤ ق ، ٦ ق تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد. أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

الحـــل





نفرض أن القوى تؤثر فى نقطة و فى الاتجاهات

$\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ل}}$ ، $\overleftarrow{\text{و م}}$ الموازية على الترتيب لاتجاهات

$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ فى المثلث المتساوى الأضلاع

أ ب حـ فتكون القوى فى الصورة القطبية هى :

(٢ ق ، ٠°) ، (٤ ق ، ١٢٠°) ، (٦ ق ، ٢٤٠°)

∴ س = ٢ ق جتا ٠° + ٤ ق جتا ١٢٠° + ٦ ق جتا ٢٤٠°

= ٢ ق × ١ + ٤ ق × $\left(\frac{-١}{٢}\right)$ + ٦ ق × $\left(\frac{-١}{٢}\right)$ = -٣ ق

، ص = ٢ ق جا ٠° + ٤ ق جا ١٢٠° + ٦ ق جا ٢٤٠°

= ٢ ق × ٠ + ٤ ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٦ ق × $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = - ق $\sqrt{٣}$

∴ $\overleftarrow{ح}$ = -٣ ق $\overleftarrow{س}$ - ق $\sqrt{٣}$ $\overleftarrow{ص}$

∴ ح = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{(-٣ ق)^٢ + (- ق \sqrt{٣})^٢}$ = $\sqrt{١٢ ق^٢}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ ق

، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{- ق \sqrt{٣}}{-٣ ق}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ هـ = ٣٠° أ، ٢١٠°

، ∵ س ، ص سالبتان. ∴ هـ = ٢١٠°

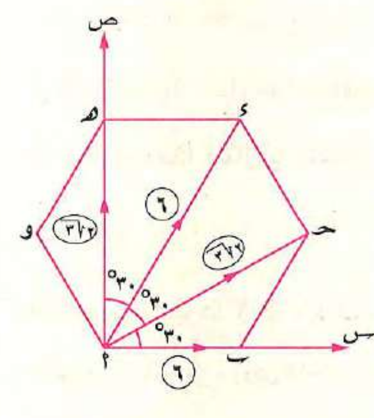
أى أن المحصلة مقدارها ٢ $\sqrt{٣}$ ق وتقع بين القوتين ٦ ق ، ٤ ق وتميل بزاوية قياسها ٣٠° مع القوة ٦ ق

- **حاول حل هذا المثال باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين.**

مثال ٦

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٦ ، ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل



نعتبر $\overleftarrow{و س}$ هو اتجاه القوة الأولى

فتكون القوى فى الصورة القطبية هى :

(٦ ، ٠°) ، (٢ $\sqrt{٣}$ ، ٣٠°) ، (٦ ، ٦٠°) ، (٢ $\sqrt{٣}$ ، ٩٠°)

∴ س = ٦ جتا ٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ٦ جتا ٦٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

= ٦ × ١ + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٦ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × ٠ = ١٢ نيوتن.

، ص = ٦ جا ٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٦ جا ٦٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٩٠°

= ٦ × صفر + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × ١ = ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

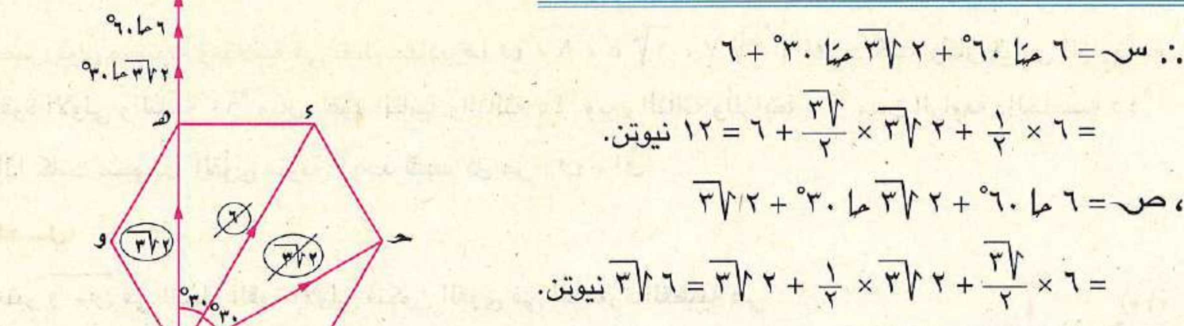
∴ ح = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٦ \sqrt{٣})^٢}$ = ٦ $\sqrt{٧}$ نيوتن.

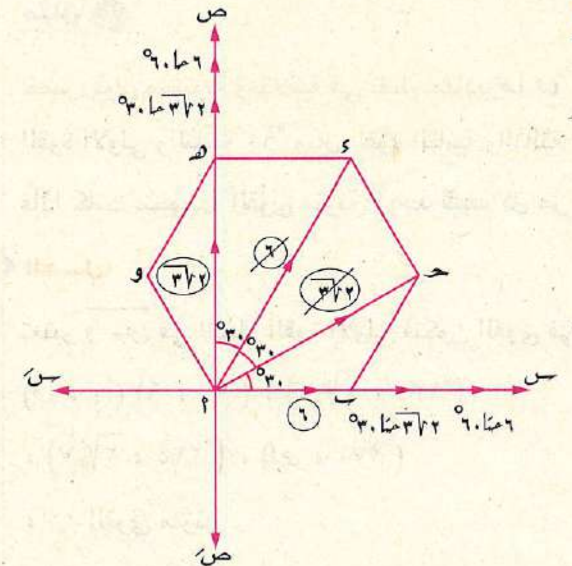
، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٦ \sqrt{٣}}{١٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ . ∴ ق (∠ هـ) ≃ ٣٦ً ٥٣َ ٤٠°

أى أن المحصلة مقدارها ٦ $\sqrt{٧}$ نيوتن وتقع بين $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ وتصنع زاوية قياسها ٣٦ً ٥٣َ ١٠° مع $\overleftarrow{أحـ}$

حل آخر : باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين :





$\therefore$ س $= 6$ جتا $60° + 2\sqrt{3}$ جتا $30° + 6$

$= 6 \times \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 6 = 12$ نيوتن.

، ص $= 6$ جا $60° + 2\sqrt{3}$ جا $30° + 2\sqrt{3}$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ نيوتن.

$\therefore$ ح $= \sqrt{(12)^2 + (6\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{7}$ نيوتن.

، ظا هـ $= \frac{ص}{س} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ ق(∠هـ) $\simeq 40° \; 53' \; 36''$

أى أن المحصلة مقدارها $6\sqrt{7}$ نيوتن وتقع بين $\overrightarrow{أح}$ ، $\overrightarrow{أء}$ وتصنع زاوية قياسها $10° \; 53' \; 36''$ مع $\overrightarrow{أح}$

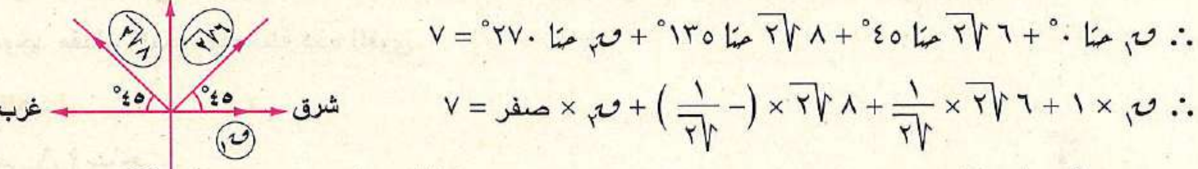
مثال ٧

أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $6\sqrt{2}$ ، $8\sqrt{2}$ ، $ق_2$ ثقل جرام والقوة الأولى فى اتجاه الشرق والثانية فى اتجاه الشمال الشرقى والثالثة فى اتجاه الشمال الغربى والرابعة تؤثر فى اتجاه الجنوب.
فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوى ٧ ثقل جرام وتؤثر فى اتجاه الشرق. **فأوجد قيمة كل من : $ق_1$ ، $ق_2$**

الحل

$\because$ المحصلة تساوى ٧ ثقل جرام وفى اتجاه الشرق.

$\therefore$ س $= 7$ ، ص $=$ صفر



$\therefore$ $ق_1$ جتا $0° + 6\sqrt{2}$ جتا $45° + 8\sqrt{2}$ جتا $135° +$ $ق_2$ جتا $270° = 7$

$\therefore$ $ق_1 \times 1 + 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 8\sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) +$ $ق_2 \times$ صفر $= 7$

$\therefore$ $ق_1 + 6 - 8 = 7$ $\qquad$ $\therefore$ $ق_1 = 9$ ثقل جرام.

، $ق_1$ جا $0° + 6\sqrt{2}$ جا $45° + 8\sqrt{2}$ جا $135° +$ $ق_2$ جا $270° =$ صفر

$\therefore$ $ق_1 \times$ صفر $+ 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 8\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} +$ $ق_2 \times (-1) =$ صفر

$\therefore$ $6 + 8 -$ $ق_2 =$ صفر $\qquad$ $\therefore$ $ق_2 = 14$ ثقل جرام.

- **حاول حل هذا المثال باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين.**

مثال ٨

خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ق ، ٩ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٧ $\sqrt{٢}$ ، ك ث.كجم وكان قياس الزاوية بين القوة الأولى والثانية ٩٠° وبين القوة الثانية والثالثة ٤٥° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° وبين الرابعة والخامسة ٤٥° فإذا كانت مجموعة القوى متزنة. **أوجد قيمة كل من : ق ، ك**

الحل

تعتبر $\overleftarrow{\text{و س}}$ فى اتجاه القوة الأولى فتكون القوى فى الصورة القطبية هى :

(ق ، ٠°) (٩ ، ٩٠°) ، (٥ $\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°)

، (٧ $\sqrt{٢}$ ، ٢٢٥°) ، (ك ، ٢٧٠°)

، ∵ القوى متزنة

∴ س = ص = ٠

، ∵ س = ق جتا ٠° + ٩ جتا ٩٠° + ٥ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° + ٧ $\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥° + ك جتا ٢٧٠°

∴ ق + ٩ × ٠ + ٥ $\sqrt{٢}$ × $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٧ $\sqrt{٢}$ × $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ك × صفر = ٠

∴ ق = ١٢

، ∵ ص = ق جا ٠° + ٩ جا ٩٠° + ٥ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥° + ٧ $\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥° + ك جا ٢٧٠°

∴ ١٢ × ٠ + ٩ × ١ + ٥ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٧ $\sqrt{٢}$ × $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ك × −١ = صفر

∴ ك = ٧

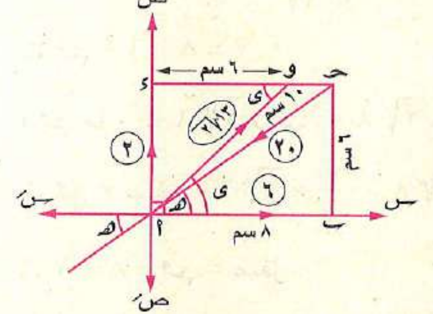
مثال ٩

أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، و ∈ حـ ء بحيث و ء = ٦ سم

أثرت القوى التى مقاديرها ٦ ، ٢٠ ، ١٣ $\sqrt{٢}$ ، ٢ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل



فى Δ أ ب حـ :

∵ (أ حـ)^{٢} = (٦)^{٢} + (٨)^{٢} = ١٠٠ ∴ أ حـ = ١٠ سم

∴ جا هـ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا هـ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

، ∵ Δ أ و ء متساوى الساقين. ∴ ق (∠ ى) = ٤٥°

ونعتبر $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ هو اتجاه القوة الأولى وفى اتجاه متجه الوحدة س

وتكون الزوايا القطبية للقوى كالآتى : صفر° ، ١٨٠° + هـ ، ى ، ٩٠° على الترتيب.

∴ س = ٦ جتا ٠° + ٢٠ جتا (١٨٠° + هـ) + ١٣ $\sqrt{٢}$ جتا ى + ٢ جتا ٩٠°

= ٦ جتا ٠° − ٢٠ جتا هـ + ١٣ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٢ جتا ٩٠°

= ٦ × ١ − ٢٠ × $\frac{٤}{٥}$ + ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢ × صفر = ٣ نيوتن.

، ص = ٦ جا ٠° + ٢٠ جا (١٨٠° + هـ) + ١٣ $\sqrt{٢}$ جا ى + ٢ جا ٩٠°

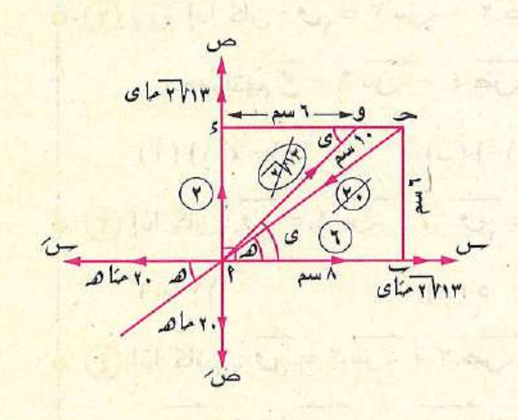
= ٦ جا ٠° − ٢٠ جا هـ + ١٣ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٢ جا ٩٠°

= ٦ × ٠° − ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ + ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢ × ١ = ٣ نيوتن.

∴ ح = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ نيوتن ، ظا ل = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٣}{٣}$ = ١

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ق(∠ل) = ٤٥° أى أن المحصلة فى اتجاه $\overleftarrow{أو}$

حل آخر : باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين :



من فيثاغورس : أحـ = ١٠ سم

∴ جا هـ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا هـ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

، ∵ Δ أوء متساوى الساقين.

∴ ق(∠ى) = ٤٥°

∴ س = ١٣ $\sqrt{٢}$ جتا ى + ٦ − ٢٠ جتا هـ

= ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٦ − ٢٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٣ نيوتن.

، ص = ١٣ $\sqrt{٢}$ جا ى + ٢ − ٢٠ جا هـ = ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢ − ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٣ نيوتن.

∴ ح = $\sqrt{(٣)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

، ظا ل = $\frac{٣}{٣}$ = ١ ، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ق(∠ل) = ٤٥°

أى أن المحصلة تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{أو}$

على محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(حيث $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ متجها وحدة أساسيان فى اتجاهين متعامدين)

(١) إذا كان : $\overline{ق_١} = \overline{س} - \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = ٢\overline{س} - ٤\overline{ص}$

، محصلتهما $\overline{ح} = ٢أ\overline{س} - ٣ب\overline{ص}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) $٣\frac{١}{٣}$ (جـ) $٣\frac{١}{٦}$ (د) ١٢

(٢) إذا كان : $\overline{ق_١} = ٣\overline{س} - ٢\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = أ\overline{س} - \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣} = ٤\overline{س} - ب\overline{ص}$

، محصلتهم $\overline{ح} = ٦\overline{س} - ٤\overline{ص}$ فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، −١) (ب) (−١ ، ١) (جـ) (−١ ، −١) (د) (١ ، ١)

(٣) إذا كان : $\overline{ق_١} = ٤\overline{س}$ ، $\overline{ق_٢} = ٨\overline{س} - ٥\overline{ص}$ فإن : $\|\overline{ح}\|$ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٢ (ب) ٥ (جـ) ١٣ (د) $\sqrt{٧٣}$

(٤) إذا كانت : $\overline{ق_١} = ٣\overline{س} + ٢\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = أ\overline{س} + ٧\overline{ص}$

، $\overline{ق_٣} = -١٢\overline{س} + ب\overline{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة

$\overline{ح} = (٦\sqrt{٢} ، \frac{٣}{٤}\pi)$ فإن : أ − ب = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) ٦

(٥) إذا أثرت القوى : $\overline{ق_١} = ٦\overline{س} + ٧\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = أ\overline{س} - ٩\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣} = ٥\overline{س} + ب\overline{ص}$

فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) −٩ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٧

(٦) إذا كانت $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ ، $\overline{ق_٣}$ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكانت :

$\overline{ق_١} = ٢\overline{س} - ٣\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = ٣\overline{س} + ٥\overline{ص}$ فإن : $\overline{ق_٣}$ = ...

(أ) $-٥\overline{س} - ٢\overline{ص}$ (ب) $-٥\overline{س} + ٢\overline{ص}$

(جـ) $٥\overline{س} + ٢\overline{ص}$ (د) $٥\overline{س} - ٢\overline{ص}$

(٧) إذا كانت محصلة القوى الموضحة

بالشكل المقابل تؤثر فى محور الصادات

فإن : ق = ... وحدة قوة.

(أ) ٢　　(ب) ٦

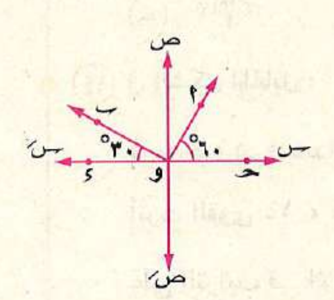
(جـ) ٨　　(د) ١٤

(٨) محصلة القوى فى الشكل المقابل

تؤثر فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{حـ ء}$　　(ب) $\overleftarrow{حـ هـ}$

(جـ) $\overleftarrow{حـ و}$　　(د) $\overleftarrow{حـ أ}$



(٩) فى الشكل المقابل :

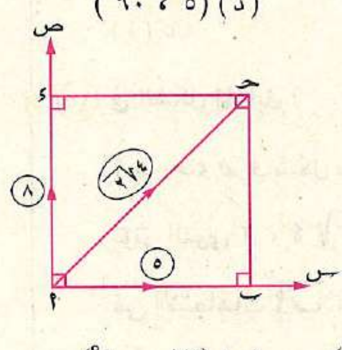
أربع قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٣ $\sqrt{٣}$ نيوتن

وتؤثر فى النقطة و فى اتجاهات $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و أ}$ ، $\overleftarrow{و ب}$ ، $\overleftarrow{و ص}$

، ق (∠ أ و حـ) = ٦٠° ، ق (∠ ب و ء) = ٣٠°

فإن مقدار واتجاه محصلة القوى يساوى ....

(أ) (٤ ، ١٨٠°)　　(ب) (٤ ، ٠°)　　(جـ) (٣ ، ٠°)　　(د) (٥ ، ٩٠°)



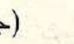
(١٠) فى الشكل المقابل :

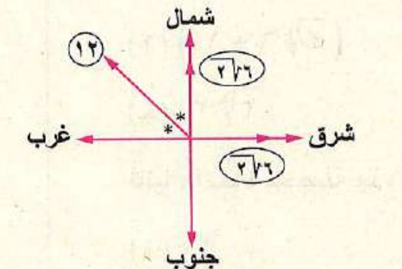
أ ب حـ ء مربع أثرت القوى ٥ ، ٨ ، ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن

فى الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ على الترتيب

فإن المحصلة فى الصورة القطبية هى ....

(أ) (٥ ، ٥٤°)　　(ب) (١٥ ، ٦٠°)　　(جـ) (١٥ ، ٨َ ٥٣°)　　(د) (١٣ ، ٩٠°)



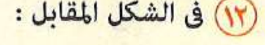


(١١) فى الشكل المقابل :

تكون محصلة القوى فى اتجاه ....

(أ) الجنوب.　　(ب) الشرق.

(جـ) الغرب.　　(د) الشمال.

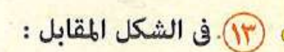


(١٢) في الشكل المقابل :

مقدار محصلة القوى ($ح$) = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) $١٠\sqrt{٢}$

(جـ) ١٠ (د) صفر



(١٣) في الشكل المقابل :

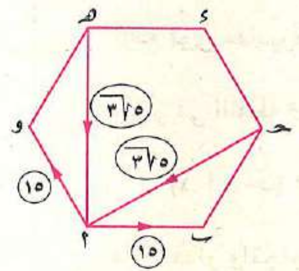
أثرت خمس قوى متساوية في المقدار ومقدار كل منها

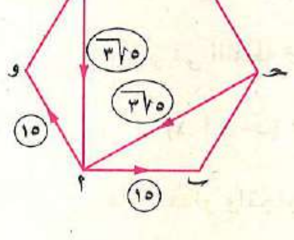
١٠ نيوتن في أحد رؤوس سداسي منتظم وفي اتجاهات

النقط الأخرى للسداسي فإن مقدار محصلة هذه القوى = ... نيوتن.

(أ) ٥٠ (ب) ٢٠

(جـ) $٣٠\sqrt{٣}$ (د) $٢٠ + ١٠\sqrt{٣}$





(١٤) في الشكل المقابل :

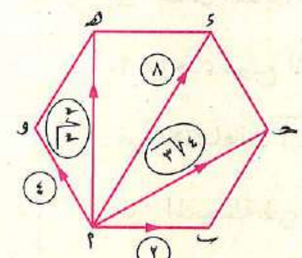
أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم

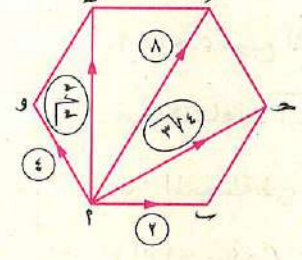
أثرت القوى ١٥ ، $٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٣}$ ، ١٥ نيوتن

على الترتيب في الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$

فإن : مقدار المحصلة $ح$ = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر





(١٥) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم

تؤثر القوى ٢ ، $٤\sqrt{٣}$ ، ٨ ، $٢\sqrt{٣}$ ، ٤ ثقل كجم

في الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب

أولًا : مقدار محصلة القوى = ... ث.كجم.

(أ) $(١٤ + ٦\sqrt{٣})$ (ب) ٢٠

(جـ) $٢٠\sqrt{٣}$ (د) $(٢٠ + \sqrt{٣})$

ثانيًا : اتجاه محصلة هذه القوى تميل على $\overleftarrow{أب}$ بزاوية قياسها ....

(أ) $°٣٠$ (ب) $°٤٥$ (جـ) $°٦٠$ (د) $°٩٠$

(١٦) إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل

تؤثر فى محور السينات

فإن : ق = ... نيوتن.

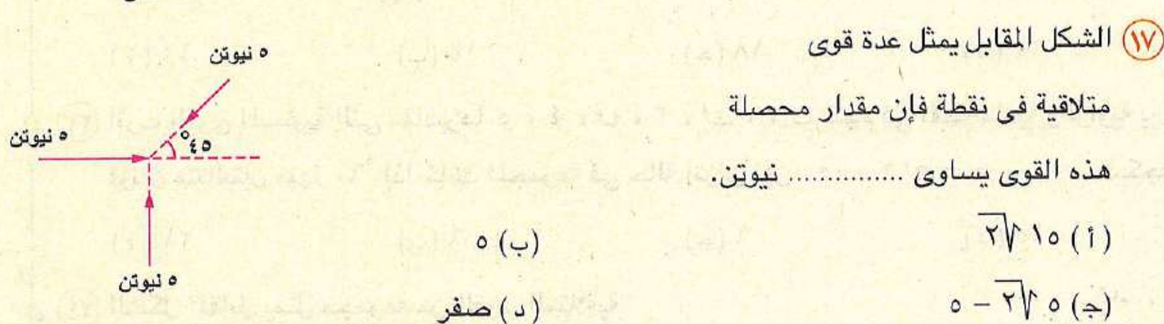
(أ) ١٠ (ب) ١٤

(جـ) ١٨ (د) ٦

(١٧) الشكل المقابل يمثل عدة قوى

متلاقية فى نقطة فإن مقدار محصلة

هذه القوى يساوى .... نيوتن.



(أ) ١٥ $\sqrt{٢}$ (ب) ٥

(جـ) ٥ $\sqrt{٢}$ − ٥ (د) صفر

(١٨) ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة مقاديرها ٤٠ ، ٣٠ ، ٤٠ نيوتن تؤثر فى نقطة الأولى فى اتجاه ٦٠° غرب الشمال والثانية فى اتجاه الغرب والثالثة فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق

فإن مقدار المحصلة يساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ١١٠ (جـ) ٦٠ (د) ٥٠

(١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم

أثرت القوى ٤ ، ١٠ ، ٦ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ على الترتيب

محصلة القوى تصنع مع $\overline{أب}$ زاوية قياسها ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) حا$^{-١}$ $\left(\frac{٣}{٥}\right)$

(٢٠) أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من أ ، ء فيه : أ ء = حـ ء = ٤ سم ، أ ب = ٧ سم ، م ∈ $\overline{أب}$ حيث أ م = ٤ سم أثرت القوى ٢٥ ، ق ، ١٥ $\sqrt{٢}$ ث.جم فى $\overleftarrow{حـب}$ ، $\overleftarrow{حـم}$ ، $\overleftarrow{حـأ}$ على الترتيب وكان معيار محصلة هذه القوى يساوى ٤٥ ث.جم فإن : ق = ... ث.جم.

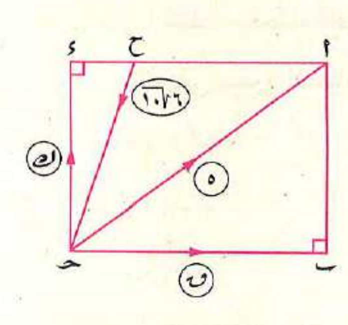
(أ) ١٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

(٢١) أثرت قوى مقاديرها ق ، ١٢ ، ٨ $\sqrt{٢}$ ، ١٠ $\sqrt{٢}$ ، ك نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب

وكان مقدار محصلة القوى = ٤ نيوتن فى اتجاه الشمال فإن : ق − ك = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٧ (جـ) ١٢ (د) ٦

(٢٢) فى الشكل المقابل :



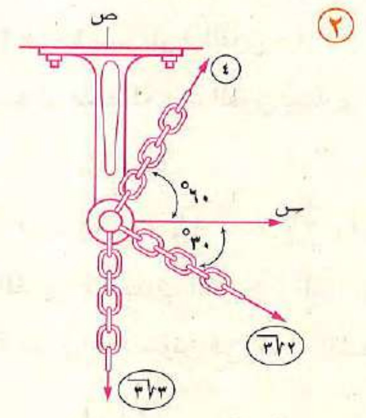
أثرت قوى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦ $\sqrt{10}$ فى المستطيل أ ب حـ ء فى الاتجاهات حـ ب ، حـ أ ، حـ ء ، ح حـ بحيث أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، أ ح = ٦ سم فإذا كانت مجموعة القوى متزنة فإن : ك = ... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ١٥ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٢٣) أثرت القوى المستوية التى مقاديرها ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث.كجم فى نقطة مادية والزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠° إذا كانت المجموعة فى حالة اتزان فإن : ق + ٢ ك = ... ث.كجم.

(أ) ٢١ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٥

(٢٤) الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتلاقية فى نقطة (و) قام محمد باتخاذ إحداثيات متعامدة مركزها النقطة (و) والاتجاه الموجب لمحور س ينطبق على $\overleftarrow{ق_1}$ فكان مقدار المحصلة $ح_1$ وتصنع زاوية قياسها (θ_1) مع الاتجاه الموجب لمحور س وقام إبراهيم باتخاذ إحداثيات متعامدة مركزها النقطة (و) والاتجاه الموجب لمحور س ينطبق على القوة $\overleftarrow{ق_2}$ فكان مقدار المحصلة $ح_2$ وتصنع زاوية قياسها (θ_2) مع الاتجاه الموجب لمحور س فإن : ....

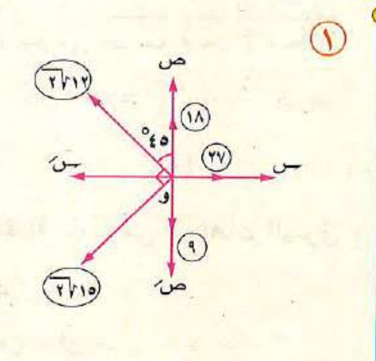


(أ) $ح_1 = ح_2$ ، $\theta_1 = \theta_2$ (ب) $ح_1 = ح_2$ ، $\theta_1 \neq \theta_2$

(جـ) $ح_1 \neq ح_2$ ، $\theta_1 = \theta_2$ (د) $ح_1 \neq ح_2$ ، $\theta_1 \neq \theta_2$

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المؤثرة فى كل شكل من الشكلين الآتيين (علمًا بأن القوى المعطاة مقدرة بالنيوتن) :



٢ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ١ ، ٢ ، $\sqrt{3}$ نيوتن تؤثر فى نقطة م واتجاهاتها هى $\overleftarrow{م أ}$ ، $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{م حـ}$ على الترتيب حيث ق (∠ أ م ب) = ٦٠° ، ق (∠ ب م حـ) = ٣٠° ، ق (∠ أ م حـ) = ٩٠°

أوجد المحصلة. «٤ نيوتن ، فى اتجاه $\overleftarrow{م ب}$»

٣ أثرت القوى ٨ ، ٤ $\sqrt{3}$ ، ٦ $\sqrt{3}$ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة فى اتجاه دورى واحد. أوجد محصلة هذه القوى مقدارًا واتجاهًا. «٤ نيوتن ، فى اتجاه القوة الرابعة»

٤ تؤثر القوى المستوية التى مقاديرها ٢ ، ٣ $\sqrt{2}$ ، ٢ $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ نيوتن فى نقطة مادية فإذا كان قياس الزاوية بين القوة الأولى والقوة الثانية ٤٥° وبين القوة الثانية والقوة الثالثة ١٠٥° وبين القوة الثالثة والقوة الرابعة ١٢٠° مأخوذة فى اتجاه دورى واحد. أوجد محصلة هذه القوى. «$\sqrt{13}$ نيوتن ، ١١ ١٩ ٦° مع القوة الثانية»

٥ خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ٩ ، ٦ ، ٤ $\sqrt{2}$ ، ٥ ، ٥ $\sqrt{2}$ نيوتن وتعمل فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى متزنة.

٦ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٦٠ ، ٨٨ ، ٦٠ ث.جم تؤثر فى نقطة ، الأولى نحو الشمال والثانية فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب والثالثة فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

«٢٨ ث.جم ، ٣٠° جنوب الغرب»

٧ أربع قوى مستوية تؤثر فى نقطة مادية ، الأولى مقدارها ٤ نيوتن وتؤثر فى اتجاه الشرق والثانية مقدارها ٢ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال والثالثة مقدارها ٥ نيوتن فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب والرابعة مقدارها ٣ $\sqrt{3}$ نيوتن فى اتجاه ٦٠° غرب الجنوب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٤ نيوتن ، ١٢٠°»

٨ أثرت قوى مقاديرها ٢ ق ، ٣ ق ، ٤ ق نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع فى ترتيب دورى واحد. أوجد محصلة القوى مقدارًا واتجاهًا. «$\sqrt{3}$ ق نيوتن ، عمودية على القوة ٣ ق»

٩ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع فيه م هى نقطة تلاقى المتوسطات. أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overleftarrow{م حـ}$ ، $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{م أ}$

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٥ $\sqrt{3}$ نيوتن ، ٣٠° مع $\overleftarrow{م أ}$»

١٠ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : ق (∠ ب أ حـ) = ١٢٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٦ $\sqrt{3}$ ، ٤ نيوتن فى نقطة أ فى اتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب. أوجد محصلة القوى مقدارًا واتجاهًا.

«١٠ $\sqrt{3}$ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{حـ ب}$»

١١ أربع قوى مقاديرها ٢ ، ١ ، ٤ ، ٣ $\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية أ وتعمل فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب حيث أ ب ح مثلث متساوى الأضلاع ، ء منتصف $\overline{\text{ب ح}}$

أوجد مقدار المحصلة واتجاهها. «١ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ح}}$»

---

١٢ أ ب ح ء مستطيل فيه : أ ب = ٤ سم ، ب ح = ٣ سم ، أثرت القوى الثلاث ٢ ، ٥ ، ٣ ثقل كجم فى نقطة أ فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى وقياس زاوية ميلها على $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

«٦ $\sqrt{٢}$ ثقل كجم ، ٤٥°»

---

١٣ أ ب ح ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب ح = ٦ سم ، و ∈ $\overline{\text{ح ء}}$ بحيث : و ء = ٦ سم.

أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ٤٠ ، ٢٦ $\sqrt{٢}$ ، ٤ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٦ $\sqrt{٢}$ نيوتن ، ٤٥°»

---

١٤ أ ب ح ء مستطيل فيه : أ ب = ٢١ سم ، ب ح = ٩ سم ، النقطة و ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ و = ٩ سم.

أربع قوى مقاديرها ٤ ، ١٠ ، ٦ ، ١٢ $\sqrt{٢}$ ث.كجم تؤثر فى النقطة (و) فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ء}}$ على الترتيب. أوجد مقدار محصلة هذه القوى وأثبت أنها توازى $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ «٢٤ ث.كجم»

---

١٥ أ ب ح ء هـ و سداسى منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. « $\sqrt{٦٥١}$ نيوتن ، ٩° ٤٠َ مع $\overleftarrow{\text{أ ب}}$»

---

١٦ أ ب ح ء هـ و شكل سداسى منتظم تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ث.كجم فى نقطة أ فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ و}}$ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٢٠ ث.كجم ، ٦٠° مع $\overleftarrow{\text{أ ب}}$»

---

١٧ أ ب ح ء هـ م سداسى منتظم ، و نقطة تقاطع أقطاره. أثرت القوى ٤ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ٢ ، ٣ ثقل جرام فى نقطة و فى اتجاهات $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{و هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و م}}$

أوجد محصلة هذه القوى وأثبت أنها تؤثر فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ء}}$ «٢ ث.جم»

---

١٨ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٨٠ سم ، ب ح = ٦٠ سم ، النقطة ء ∈ $\overline{\text{أ ح}}$ حيث ب ء = ء ح ، أثرت أربع قوى مقاديرها ٨ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٠ نيوتن فى النقطة ب فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ على الترتيب. أوجد مقدار محصلة هذه القوى وأثبت أنها تؤثر فى $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ «١٥ نيوتن»

---

١٩ أ ب ح ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب ح}}$ بحيث ب هـ = ٥ سم. أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٩ ث.جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى.

«١٠ $\sqrt{٢}$ ث.جم وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ح}}$»

٢٠ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، النقطة هـ هى منتصف $\overline{ب حـ}$ والنقطة و هى منتصف $\overline{ء حـ}$ ، أثرت خمس قوى مقاديرها ٢ ، ١٢ $\sqrt{٥}$ ، ٦ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٥}$ ، ٤ ث.كجم فى النقطة أ فى اتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٣٠ ث.كجم ، ١٢ ٥٢ ٣٦°»

---

٢١ أ ب حـ ء مربع ، هـ ∈ $\overline{أ ء}$ أثرت أربع قوى متلاقية فى ب مقاديرها ٤ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ١٠ $\sqrt{٢}$ ، ق ثقل كجم وخطوط عملها فى الاتجاهات $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب هـ}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ فإذا كانت هذه القوى متزنة فأوجد قياس ∠ أ ب هـ وقيمة ق «٣٠° ، ٢ (٥ − $\sqrt{٣}$) ث.كجم»

---

٢٢ أثرت القوى المستوية ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث.كجم فى نقطة مادية وقياس الزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠° أوجد مقدار كل من ق ، ك حتى تكون المجموعة فى حالة اتزان. «٩ ، ٦ ث.كجم»

---

٢٣ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٦ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ك نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات : الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، والجنوب على الترتيب.

أوجد قيمتى : ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٢ نيوتن فى اتجاه الشمال. «٩ ، ٣ نيوتن»

---

٢٤ تؤثر قوى مقاديرها ق ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ١٢ $\sqrt{٣}$ ، ٣٦ ثقل جم فى نقطة مادية وكانت الثلاثة الأخيرة فى اتجاهات : الشمال ، ٦٠° غرب الشمال ، ٦٠° جنوب الشرق على الترتيب فإذا كانت محصلة القوى = ٨ ث.جم فى اتجاه الشرق. فعين مقدار واتجاه ق «١٦ ث.جم ، ٦٠° شمال الشرق»

---

٢٥ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٨ ، ك ، ٥ ، ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات : الشرق ، ٣٠° شرق الشمال ، الشمال ، الغرب ، والجنوب على الترتيب.

أوجد قيمتى : ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٤ نيوتن فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق. «٣ ، ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

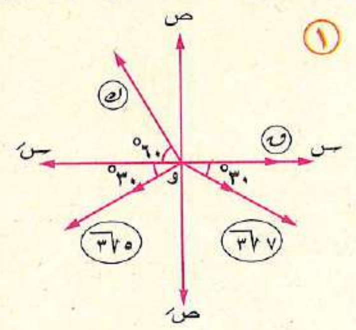
---

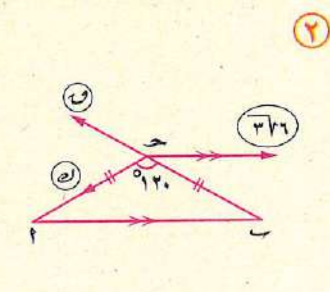
٢٦ أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من : أ ، ء فيه : أ ء = حـ ء = ٤٠ سم ، أ ب = ٧٠ سم ، م ∈ $\overline{أ ب}$ بحيث أ م = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٥ ، ق ، ١٠ $\sqrt{٢}$ ، ٣٥ ثقل جرام فى $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ م}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ على الترتيب. وكان معيار محصلة هذه القوى يساوى ٥٠ ثقل جرام. أوجد ق

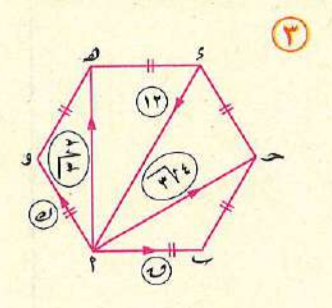
«ق = ١٠ ث.جم»

---

٢٧ فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة كل من ق ، ك مقدرة بالنيوتن بحيث تصبح كل مجموعة مما يأتى متزنة :

① 

② 

③ 

٢٨ تؤثر القوى المستوية التى مقاديرها $ق$ ، $٣\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ نيوتن فى نقطة مادية بحيث كانت القوة الأولى تعمل فى اتجاه الشرق وقياس الزاوية بين القوة الأولى والقوة الثانية ٤٥° وبين القوة الثانية والقوة الثالثة ١٠٥° وبين القوة الثالثة والقوة الرابعة ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلة هذه القوى يساوى $٣\sqrt{٢}$ نيوتن. فأوجد قيمة $ق$ ، قياس الزاوية بين خط عمل المحصلة وخط عمل القوة الأولى. «٣ نيوتن ، ٤٥°»

---

٢٩ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٤ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $ق$ ، $٢\sqrt{٣}$ ، $ك$ ث.كجم تعمل فى الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب فإذا كان مقدار محصلة المجموعة يساوى ٢٠ ث.كجم فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$ أوجد قيمتى : $ق$ ، $ك$ «١٠ ، ٤ ث.كجم»

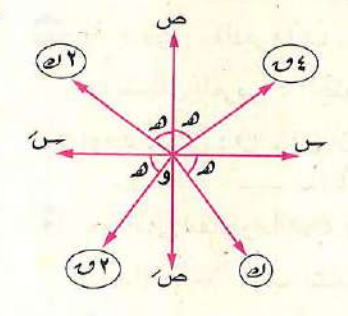
---

٣٠ الشكل المقابل يبين أربع قوى مستوية متلاقية فى نقطة الأصل «و» فى الاتجاهات الموضحة. حيث : $جا هـ = \frac{٤}{٥}$

وأن محصلة هذه القوى مقدارها $٨\sqrt{٢}$ نيوتن

وتصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع $\overleftarrow{و س}$

أوجد قيمتى : $ق$ ، $ك$



«٣ ، ١٤ نيوتن»

---

٣١ إذا كانت : $\overline{ق_1} = ٥\overline{س} + ٣\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2} = أ\overline{س} + ٦\overline{ص}$ ، $\overline{ق_3} = -١٤\overline{س} + ب\overline{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overline{ح} = \left(١٠\sqrt{٢} ، \frac{٣}{٤}\pi\right)$ أوجد قيمتى : أ ، ب «-١ ، ١»



الدرس

4

اتزان جسم تحت تأثير قوتين / ثلاث قوى متلاقية فى نقطة (قاعدة مثلث القوى - قاعدة لامى)

أولًا اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

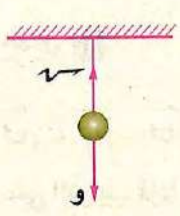
شروط اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

* يتزن الجسم الجاسئ تحت تأثير قوتين فقط إذا كانت القوتان :

١ متساويتين فى المقدار. ٢ متضادتين فى الاتجاه.

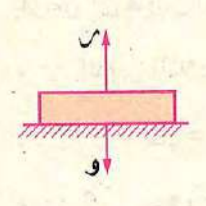
٣ خطا عملهما على استقامة واحدة.

* أمثلة على اتزان جسم تحت تأثير قوتين :



١ جسم معلق بحبل خفيف :

إذا علق جسم وزنه (و) بحبل خفيف من إحدى نقطه فإنه يتزن تحت تأثير قوتين هما : الوزن (و) ويؤثر رأسيًا إلى أسفل ، الشد (ش) فى الحبل ويؤثر رأسيًا إلى أعلى ونستنتج أن : ش = و

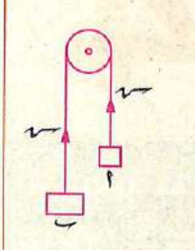


٢ جسم موضوع على نضد أفقى أملس :

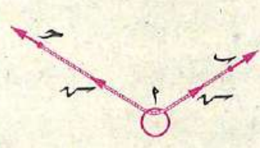
إذا وضع جسم وزنه (و) على نضد أفقى أملس فإنه يتزن تحت تأثير قوتين هما : الوزن (و) ويؤثر رأسيًا إلى أسفل ، رد فعل النضد على الجسم (ر) ويؤثر رأسيًا إلى أعلى ونستنتج أن : ر = و

ملاحظـــات

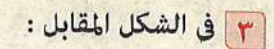
١ إذا أثرت على جسم متماسك قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه وفي نفس الخط المستقيم فلا يكون لهما أى تأثير على الجسم سواء من ناحية السكون أو الحركة.



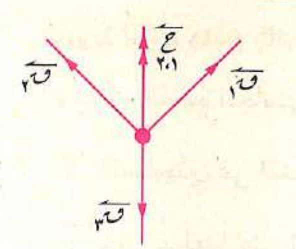
٢ في الشكل المقابل :
إذا مر خيط على بكرة ملساء وعلق في طرفي الخيط
أ ، ب جسمان بحيث أصبح الخيط مشدودًا فإن الشدين
عند طرفي الخيط يكونان متساويين.



٣ في الشكل المقابل :
إذا مر خيط في حلقة ملساء (معلقة فيه تعليقًا حرًا) فإن الشد في كل من جزأى الخيط $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ يكونان متساويين في المقدار.



ثانيًا اتزان جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة



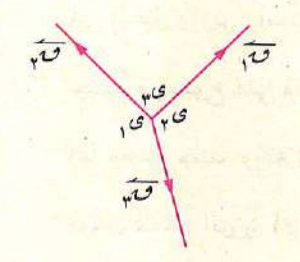
إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مثل $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$
كما في الشكل وكانت $\overrightarrow{ح_{1،2}}$ هي محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فإن القوتين $\overrightarrow{ح_{1،2}}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ تكونان متزنتين ، ومن شروط اتزان قوتين نستنتج أن $\overrightarrow{ح_{1،2}}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه ولهما نفس خط العمل.

- **وعمومًا** : إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة فإن محصلة أى قوتين منها تكون مساوية للقوة الثالثة في المقدار ومضادة لها في الاتجاه ولهما نفس خط العمل.

مثال ١

$\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ١٢ ، $١٢\sqrt{٣}$ ، ٢٤ نيوتن على الترتيب فإذا كانت هذه القوى متزنة فأوجد قياسات الزوايا بين خطوط عمل القوى الثلاث.

الحـــل



بفرض أن قياس الزاوية بين خطى عمل $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = $ى_3$

، ∵ القوى الثلاث متزنة.

∴ $ح_{1،2}$ = $ق_3$ = ٢٤ ومضادة لها في الاتجاه.

، ∵ $ح_{1،2}^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + ٢ ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى_3$

$\therefore$ $(٢٤)^٢ = (١٢)^٢ + \left(١٢\sqrt{٣}\right)^٢ + ٢ \times ١٢ \times ١٢\sqrt{٣}$ جتا $ى_٣$

$\therefore$ $٥٧٦ = ١٤٤ + ٤٣٢ + ٢٨٨\sqrt{٣}$ جتا $ى_٣$

$\therefore$ جتا $ى_٣ = ٠$ $\qquad$ $\therefore$ $ى_٣ = ٩٠^\circ$

بالمثل بفرض أن قياس الزاوية بين خطى عمل $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = $ى_١$

، $\because$ القوى الثلاث متزنة $\qquad$ $\therefore$ $ح_{٢،٣} = ق_١ = ١٢$ ومضادة لها فى الاتجاه.

، $\because$ $ح^٢_{٢،٣} = ق^٢_٢ + ق^٢_٣ + ٢ ق_٢ ق_٣$ جتا $ى_١$

$\therefore$ $١٤٤ = ٤٣٢ + ٥٧٦ + ٢ \times ١٢\sqrt{٣} \times ٢٤$ جتا $ى_١$

$\therefore$ جتا $ى_١ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\qquad$ $\therefore$ $ى_١ = ١٥٠^\circ$

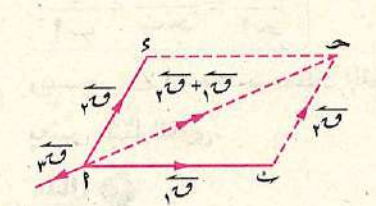
$\therefore$ $ى_٢$ (قياس الزاوية بين خطى عمل $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$) $= ٣٦٠^\circ - (٩٠^\circ + ١٥٠^\circ) = ١٢٠^\circ$

* نعلم أن الشرط اللازم والكافى لاتزان جسم جاسئ تحت تأثير عدة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة هو أن تمثل هذه القوى هندسيًا بمضلع مقفل وبالتالى نستنتج القاعدة التالية :

قاعدة ١

إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة فى اتجاه دورى واحد فإن هذه القوى تكون متزنة.

ففى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى أ وبإكمال متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

نجد أن المتجهات $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ أ}$

تمثل القوى الثلاث مقدارًا واتجاهاً.

، $\because$ $\overrightarrow{أ حـ} = \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب حـ}$ $\qquad$ $\therefore$ المتجه $\overrightarrow{أ حـ}$ يمثل محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

ولكن المتجه $\overrightarrow{حـ أ}$ يمثل القوة $\overleftarrow{ق_٣}$ $\qquad$ ، $\because$ $\overrightarrow{أ حـ} + \overrightarrow{حـ أ} = \overrightarrow{٠}$

$\therefore$ $\overleftarrow{ق_٣}$ تساوى فى المقدار وتضاد فى الاتجاه محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

أى أن $\overleftarrow{ق_٣}$ متزنة مع محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

$\therefore$ القوى الثلاث $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ متزنة.

ملاحظـــة

- لكى تتزن ثلاث قوى متلاقية فى نقطة وليست على استقامة واحدة يجب أن تكون مقاديرها تصلح لأن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث ، بمعنى أنه لا بد أن يكون مقدار كبرى هذه القوى أصغر من مجموع مقدارى القوتين الأخريين لأنه فى أى مثلث يجب أن يكون أكبر الأضلاع طولاً أصغر من مجموع طولى الضلعين الآخرين.

فمثلا القوى الثلاث التى مقاديرها ٣ ، ٤ ، ٩ وحدة قوة لا يمكن أن تتزن لأن الأعداد ٣ ، ٤ ، ٩ لا تصلح لأن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث لأن ٩ > ٣ + ٤ أما القوى التى مقاديرها ٤ ، ٧ ، ٨ يمكن أن تتزن ولا نقول متزنة حيث إن الاتزان يعتمد على مقادير القوى واتجاهها أيضًا.

- تتزن الثلاث قوى المتلاقية فى نقطة إذا كان مقدار كبرى هذه القوى يساوى مجموع مقدارى القوتين الآخريين فى حالة أن تكون هذه القوى على استقامة واحدة.

قاعدة ٢ قاعدة مثلث القوى :

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى وفى اتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

إذا رمزنا لمقادير القوى بالرموز $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ وكان Δ أ ب حـ هو المثلث الذى أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاث فإن $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ تمثل القوى $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ ، $\overline{ق_3}$ على الترتيب مقدارًا واتجاهًا حيث أن الجسم متزن ويكون

$$\frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب حـ} = \frac{ق_3}{حـ أ}$$

ويسمى Δ أ ب حـ بـ «مثلث القوى» ويلاحظ أنه يمكن رسم عدد غير منته من المثلثات المتشابهة والتى كل منها يعتبر مثلثًا للقوى.

مثال ٢

ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، ٩٦ ث.كجم وأمكن تمثيلها بالقطع المستقيمة الموجهة $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب فى Δ أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، حـ أ = ١٢ سم

أوجد قيمة كل من : $ق_1$ ، $ق_2$

الحـــل

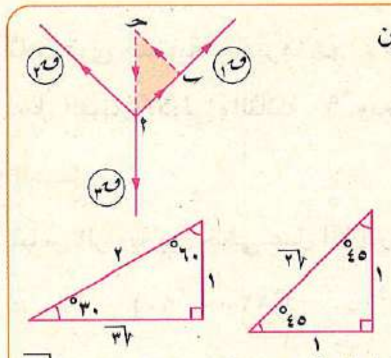
∵ القوى تمثل بأضلاع مثلث مأخوذة فى اتجاه دورى واحد.

∴ القوى متزنة وباستخدام قاعدة مثلث القوى :

$$\therefore \frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب حـ} = \frac{٩٦}{حـ أ} \qquad \therefore \frac{ق_1}{٨} = \frac{ق_2}{١٠} = \frac{٩٦}{١٢}$$

∴ $ق_1$ = ٦٤ ث.كجم ، $ق_2$ = ٨٠ ث.كجم.

ملاحظتان هامتان



١ من الممكن رسم مثلث القوى بحيث يكون ضلعان من أضلاعه محمولين على خطى عمل قوتين والضلع الثالث يوازى خط عمل القوة الثالثة.

ففى الشكل المقابل : Δ ا ب حـ يكون مثلث قوى.

٢ * إذا كان مثلث القوى لثلاث قوى متزنة هو مثلث ثلاثينى ستينى كانت النسبة بين أطوال أضلاعه كنسبة ١ : ٢ : $\sqrt{3}$

* وإذا كان مثلث القوى قائم الزاوية ومتساوى الساقين فالنسبة بين أطوال أضلاعه كنسبة ١ : ١ : $\sqrt{2}$

معلومة إثرائية

إذا رسم مثلث أضلاعه عمودية على اتجاهات القوى المتزنة فإن النسبة بين كل قوة وطول ضلع المثلث العمودى عليها متساوية.

فى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{و} \perp \overline{ا حـ}$ ، $\overleftarrow{ق_1} \perp \overline{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ق_2} \perp \overline{ا ب}$

$\therefore \frac{و}{ا حـ} = \frac{ق_1}{ب حـ} = \frac{ق_2}{ا ب}$ تسمى هذه القاعدة «مثلث القوى العمودى»



قاعدة ٣ قاعدة لامى :

إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

فإذا رمزنا لمقادير القوى بالرموز $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$

وكانت $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$ هى قياسات الزوايا المقابلة لها على الترتيب كما فى الشكل المقابل.

فإن : Δ ا ب حـ هو مثلث القوى

$$\therefore \frac{ق_1}{ب حـ} = \frac{ق_2}{حـ ا} = \frac{ق_3}{ا ب} \quad (١)$$

ومن قانون الجيب : $\therefore \frac{ب حـ}{جا (180° - هـ_1)} = \frac{حـ ا}{جا (180° - هـ_2)} = \frac{ا ب}{جا (180° - هـ_3)}$

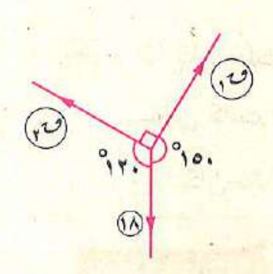
أى أن $\frac{ب حـ}{جا هـ_1} = \frac{حـ ا}{جا هـ_2} = \frac{ا ب}{جا هـ_3} \quad (٢)$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{ق_1}{جا هـ_1} = \frac{ق_2}{جا هـ_2} = \frac{ق_3}{جا هـ_3}$

مثال ٣

ثلاث قوى مستوية مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، ١٨ نيوتن متلاقية فى نقطة ومتزنة فإذا كان قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية ٩٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° **فأوجد قيمة كل من : $ق_1$ ، $ق_2$**

الحل



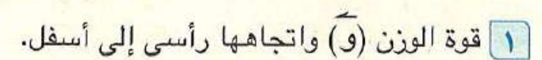
قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثالثة

$= ٣٦٠° - (٩٠° + ١٢٠°) = ١٥٠°$

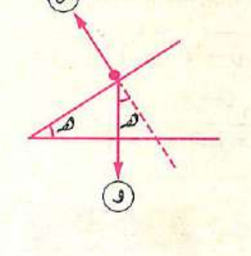
وحسب قاعدة لامى يكون : $\frac{ق_1}{\text{جا } ١٢٠°} = \frac{ق_2}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{١٨}{\text{جا } ٩٠°}$

$\therefore \frac{ق_1}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{ق_2}{\frac{١}{٢}} = \frac{١٨}{١}$

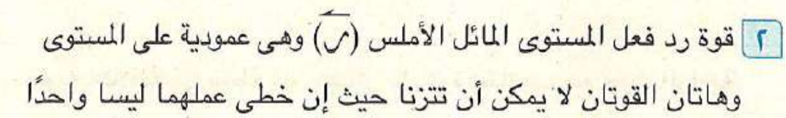
$\therefore ق_1 = ١٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٩\sqrt{٣}$ نيوتن. ، $ق_2 = ١٨ \times \frac{١}{٢} = ٩$ نيوتن.



اتزان جسم على مستوٍ مائل أملس



إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإن الجسم يكون واقعًا تحت تأثير قوتين :



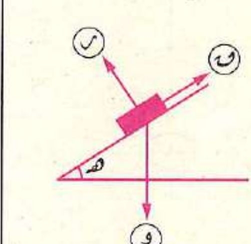
١ قوة الوزن ($\overrightarrow{و}$) واتجاهها رأسى إلى أسفل.

٢ قوة رد فعل المستوى المائل الأملس ($\overrightarrow{ر}$) وهى عمودية على المستوى

وهاتان القوتان لا يمكن أن تتزنا حيث إن خطى عملهما ليسا واحدًا

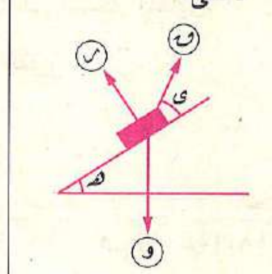
ولكى يحدث الاتزان لابد من وجود قوة ثالثة تؤثر على الجسم وتأخذ أحد الأشكال الآتية :

(أ) القوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى.

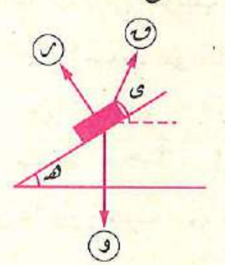


(ب) القوة أفقية.

(جـ) القوة فى اتجاه يميل بزاوية ى على المستوى لأعلى.



(د) القوة فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية ى لأعلى.

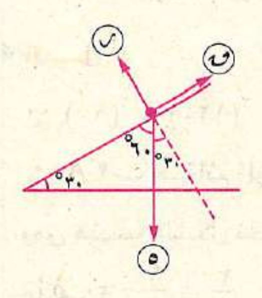


ملاحظة

رد فعل المستوى الأملس ($\overrightarrow{ر}$) يكون عموديًا على المستوى.

مثال ٤

وضع جسم وزنه ٥ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها °٣٠ ومنع الجسم من الانزلاق بالتأثير عليه بقوة قدرها ق تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى.
أوجد مقدار ق وكذا رد فعل المستوى على الجسم.



الحل

الجسم متزن بتأثير القوى التى مقاديرها ق ، ر ، ٥ ثقل كجم

كما فى الشكل وقياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية = °٩٠

وبين الثانية والثالثة = °١٨٠ − °٣٠ = °١٥٠

وبين الثالثة والأولى = °٩٠ + °٣٠ = °١٢٠

وبتطبيق قاعدة لامى يكون : $\frac{ق}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{ر}{\text{جا } ١٢٠°} = \frac{٥}{\text{جا } ٩٠°}$

أى : $\frac{ق}{\frac{١}{٢}} = \frac{ر}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٥}{١}$

∴ ق = ٥ × $\frac{١}{٢}$ = ٢,٥ ثقل كجم. ، ر = ٥ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ ثقل كجم.

مثال ٥

وضع ثقل قدره ٢٠ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ى حيث جا ى = $\frac{٤}{٥}$ ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية قدرها (ق) أوجد مقدار ق وكذا رد فعل المستوى.

الحل

الثقل متزن بتأثير ثلاث قوى مقاديرها ق ، ر ، ٢٠ ثقل كجم

فيكون قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية = °٩٠ + ى

وبين القوتين الثانية والثالثة = °١٨٠ − ى وبين القوتين الثالثة والأولى = °٩٠

وبتطبيق قاعدة لامى يكون :

$$\frac{ق}{\text{جا }(١٨٠° - ى)} = \frac{ر}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{٢٠}{\text{جا }(٩٠° + ى)}$$

أى : $\frac{ق}{\text{جا ى}} = \frac{ر}{١} = \frac{٢٠}{\text{جتا ى}}$

وحيث إن جا ى = $\frac{٤}{٥}$

∴ جتا ى = $\frac{٣}{٥}$ ∴ $\frac{ق}{\frac{٣}{٥}} = ر = \frac{٢٠}{\frac{٤}{٥}}$

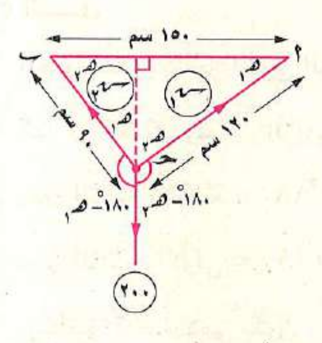
∴ ق = ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٥}{٤}$ = ١٥ ثقل كجم. ، ر = ٢٠ × $\frac{٥}{٤}$ = ٢٥ ثقل كجم.

أمثلة عامة على توازن ثلاث قوى

مثال ٦

علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٩٠ سم ، ١٢٠ سم من نقطتين فى خط أفقى واحد البعد بينهما ١٥٠ سم أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى حالة الاتزان.

الحل



∵ $(٩٠)^٢ + (١٢٠)^٢ = (١٥٠)^٢$

∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

ومن هندسة الشكل نجد أن :

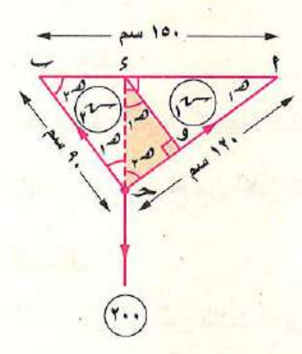
$جا هـ_١ = \frac{٩٠}{١٥٠} = \frac{٣}{٥}$ ، $جا هـ_٢ = \frac{١٢٠}{١٥٠} = \frac{٤}{٥}$

وباستخدام قاعدة لامى : $\frac{ش_١}{جا (١٨٠° - هـ_١)} = \frac{ش_٢}{جا (١٨٠° - هـ_٢)} = \frac{٢٠٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_١}{جا هـ_١} = \frac{ش_٢}{جا هـ_٢} = \frac{٢٠٠}{جا ٩٠°}$ ∴ $\frac{ش_١}{\frac{٣}{٥}} = \frac{ش_٢}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٢٠٠}{١}$

∴ $ش_١ = ١٢٠$ ث.جم ، $ش_٢ = ١٦٠$ ث.جم.

حل آخر : باستخدام قاعدة مثلث القوى :



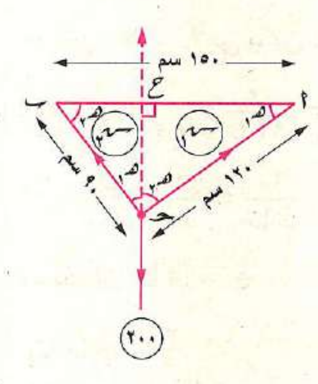
نرسم $\overline{ءو}$ // $\overline{حـ ب}$ فيكون Δ ء و حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{ش_١}{حـ و} = \frac{ش_٢}{و ء} = \frac{٢٠٠}{ء حـ}$

∴ $ش_١ = ٢٠٠ \times \frac{حـ و}{ء حـ} = ٢٠٠$ جا $هـ_١ = ٢٠٠ \times \frac{٣}{٥} = ١٢٠$ ث.جم

، $ش_٢ = ٢٠٠ \times \frac{و ء}{ء حـ} = ٢٠٠$ جا $هـ_٢ = ٢٠٠ \times \frac{٤}{٥} = ١٦٠$ ث.جم

حل ثالث : (بالتحليل) :



∵ القوى الثلاثة متزنة.

∴ محصلة قوتى الشد = القوة الثالثة مقدارًا وتضادها اتجاهًا

∴ $\overline{ش_١}$ ، $\overline{ش_٢}$ هما مركبتا $\overline{ح}$ وهما مركبتان متعامدتان

∴ $ش_١ = ح$ جتا $هـ_٢ = ٢٠٠ \times \frac{٣}{٥} = ١٢٠$ ث.جم

، $ش_٢ = ح$ جا $هـ_٢ = ٢٠٠ \times \frac{٤}{٥} = ١٦٠$ ث.جم

حل رابع : (باستخدام قاعدة مثلث القوى العمودى) :

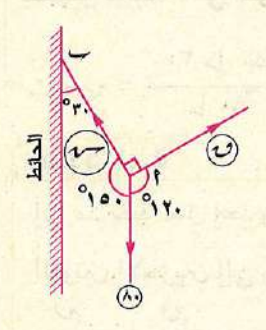
∵ Δ أ ب حـ مثلث القوى العمودى. ∴ $\frac{ش_١}{٩٠} = \frac{٢٠٠}{١٥٠} = \frac{ش_٢}{١٢٠}$

∴ $ش_١ = ١٢٠$ث.جم ، $ش_٢ = ١٦٠$ث.جم

مثال ٧

علق ثقل مقداره ٨٠ ثقل جم فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط فاتزن عندما كان الخيط مائلاً على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

أوجد فى وضع الاتزان مقدار القوة وكذلك الشد فى الخيط عندئذٍ.



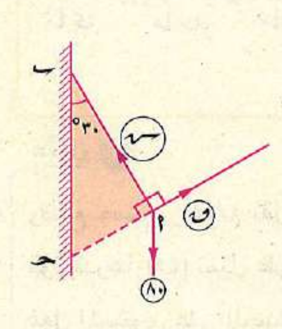
الحـــل

حسب قاعدة لامى يكون : $\frac{\text{ق}}{\text{جا ١٥٠°}} = \frac{\text{ش}}{\text{جا ١٢٠°}} = \frac{\text{٨٠}}{\text{جا ٩٠°}}$

$\therefore \frac{\text{ق}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ش}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{\text{٨٠}}{١}$

$\therefore$ ق $= ٨٠ \times \frac{١}{٢} = ٤٠$ ث.جم ، ش $= ٨٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٤٠\sqrt{٣}$ ث.جم

حل آخر : (قاعدة مثلث القوى) :



نمد خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ ليلاقى الحائط فى ح

فيكون Δ ح أ ب هو مثلث القوى.

$\therefore$ حسب قاعدة مثلث القوى يكون : $\frac{\text{ق}}{\text{أ ح}} = \frac{\text{ش}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{٨٠}}{\text{ب ح}}$

، $\because \Delta$ ح أ ب ثلاثينى ستينى.

$\therefore$ ح أ : أ ب : ب ح $= ١ : \sqrt{٣} : ٢$ $\therefore \frac{\text{ق}}{١} = \frac{\text{ش}}{\sqrt{٣}} = \frac{\text{٨٠}}{٢}$

$\therefore$ ق $= ٤٠$ ث.جم ، ش $= ٤٠\sqrt{٣}$ ث.جم

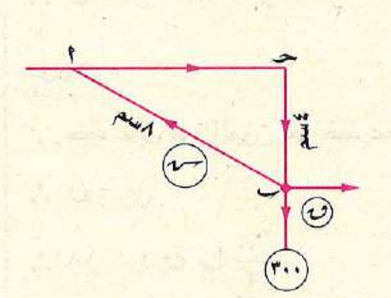
مثال ٨

خيط خفيف $\overline{\text{أ ب}}$ طوله ٨ سم ثبت طرفه أ فى نقطة ثابتة وعلق وزن مقداره ٣٠٠ ث. جم من طرفه الآخر ب أوجد مقدار القوة اللازمة لحفظ التوازن على بعد ٤ سم من الخط الأفقى المار فى أ وأيضًا الشد فى الخيط فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ إذا كانت القوة المؤثرة أفقية. ٢ إذا كان اتجاه القوة متعامدًا مع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

الحـــل

الحالة الأولى :



إذا كانت القوة المؤثرة أفقية :

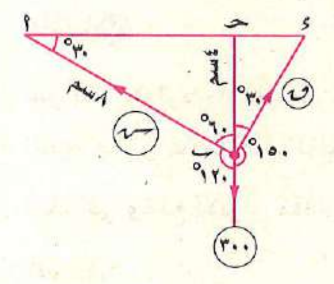
يمكن اعتبار المثلث أ ب ح مثلث القوى.

$\therefore \frac{\text{ش}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ق}}{\text{أ ح}} = \frac{\text{٣٠٠}}{\text{ب ح}}$

، $\because$ أ ح $= \sqrt{(٨)^٢ - (٤)^٢} = ٤\sqrt{٣}$ سم $\therefore \frac{\text{ش}}{٨} = \frac{\text{ق}}{٤\sqrt{٣}} = \frac{\text{٣٠٠}}{٤}$

$\therefore$ ش $= ٦٠٠$ ث.جم ، ق $= ٣٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم

الحالة الثانية :

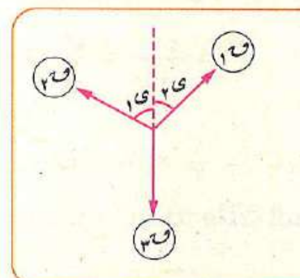


إذا كان اتجاه القوة متعامدًا مع $\overleftrightarrow{أب}$

بتطبيق قاعدة لامى يكون : $\frac{س}{حا ١٥٠°} = \frac{ق}{حا ١٢٠°} = \frac{٣٠٠}{حا ٩٠°}$

$\therefore$ $س = \frac{٣٠٠ حا ١٥٠°}{حا ٩٠°} = ١٥٠$ ث.جم ، $ق = \frac{٣٠٠ حا ١٢٠°}{حا ٩٠°} = ١٥٠\sqrt{٣}$ ث.جم

ملاحظــة



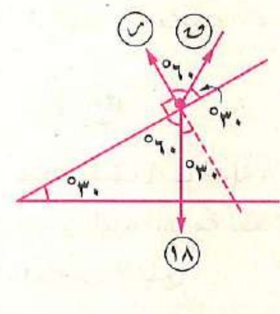
إذا مد خط عمل إحدى القوى الثلاث ليقسم الزاوية بين خطى عمل القوتين الأخريين إلى زاويتين فيمكن تطبيق قاعدة لامى كما يلى :

$$\frac{ق_١}{حا ى_١} = \frac{ق_٢}{حا ى_٢} = \frac{ق_٣}{حا (ى_١ + ى_٢)}$$

مثال ٩

وضع جسم وزنه ١٨ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة قدرها (ق) تميل على اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° فأوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

الحـــل



الجسم متزن بتأثير القوى الثلاث التى مقاديرها ق ، ر ، ١٨ ثقل كجم

حيث قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية = ٦٠°

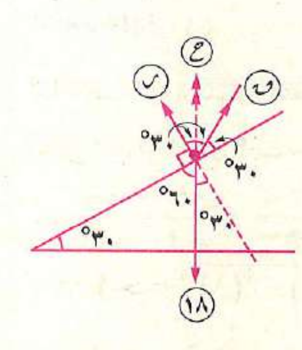
وبين الثانية والثالثة = ١٥٠°

وبين الثالثة والأولى = ٣٠° + ٩٠° + ٣٠° = ١٥٠° أيضًا

وبتطبيق قاعدة لامى يكون : $\frac{ق}{حا ١٥٠°} = \frac{ر}{حا ١٥٠°} = \frac{١٨}{حا ٦٠°}$ أى $\frac{ق}{\frac{١}{٢}} = \frac{ر}{\frac{١}{٢}} = \frac{١٨}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

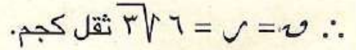
$\therefore$ $ق = ر = ١٨ \times \frac{١}{٢} \div \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٦\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

حل آخر :



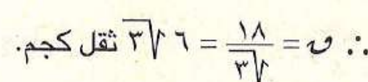
$\because$ خط عمل قوة الوزن هو خط عمل محصلة القوتين $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ر}$ وينصف الزاوية بينهما

$\therefore$ $ق = ر$ ، $\because$ $ح = ٢ ق جتا \frac{ى}{٢}$



$\therefore$ $١٨ = ٢ ق جتا \frac{٦٠°}{٢}$ $\therefore$ $١٨ = ٢ ق جتا ٣٠°$

$\therefore$ $١٨ = ٢ ق \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$



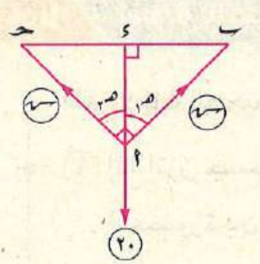
$\therefore$ $ق = \frac{١٨}{\sqrt{٣}} = ٦\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

$\therefore$ $ق = ر = ٦\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

مثال ١٠

خيط خفيف ربط من طرفيه فى نقطتين ب ، ح بحيث كان $\overline{\text{ب ح}}$ أفقيًا ثم انزلقت على الخيط حلقة صغيرة ملساء وزنها ٢٠ ث.جم فأصبح قياس الزاوية بين فرعى الخيط عند وضع التوازن ٩٠°

أثبت أن فرعى الخيط متساويان فى الطول ثم أوجد قيمة الشد فى كل منهما.



الحل

∵ الحلقة ملساء.

∴ مقدار الشد فى فرع الخيط $\overline{\text{أب}}$ = مقدار الشد فى فرع الخيط $\overline{\text{أح}}$ = ش

وباستخدام قاعدة لامى :

$\therefore \frac{\text{ش}}{\text{جا هـ}_2} = \frac{\text{ش}}{\text{جا هـ}_1} = \frac{٢٠}{\text{جا } ٩٠^\circ}$ ∴ جا هـ_2 = جا هـ_1

$\therefore \text{هـ}_1 = \text{هـ}_2 = \frac{٩٠^\circ}{٢} = ٤٥^\circ$ $\therefore \frac{\text{ش}}{\text{جا } ٤٥^\circ} = \frac{٢٠}{\text{جا } ٩٠^\circ}$ $\therefore \boxed{\text{ش} = ١٠\sqrt{٢}}$

، ∵ $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{ب ح}}$ ، ق$(\angle \text{هـ}_1)$ = ق$(\angle \text{هـ}_2)$ = ٤٥°

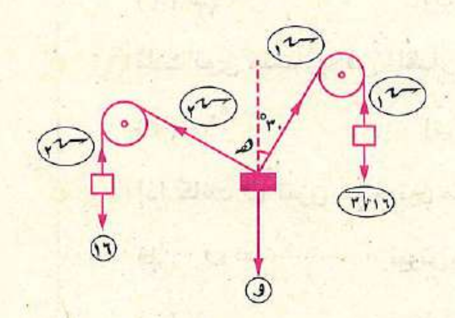
∴ أب = أح ∴ فرعا الخيط متساويان فى الطول.

مثال ١١

علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين يميل أولهما على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° ويمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة ويحمل الطرف الآخر لهذا الخيط جسمًا وزنه ١٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن. ويميل الخيط الثانى على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويمر على بكرة ملساء أخرى مثبتة ويحمل الطرف الآخر لهذا الخيط جسمًا وزنه ١٦ نيوتن.

أوجد فى وضع التوازن قيمة الوزن (و) وقيمة هـ

الحل



باستخدام قاعدة لامى :

$\therefore \frac{\text{ش}_1}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ش}_2}{\text{جا } ٣٠^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا (هـ} + ٣٠^\circ)}$

$\therefore \frac{١٦\sqrt{٣}}{\text{جا هـ}} = \frac{١٦}{\text{جا } ٣٠^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا (هـ} + ٣٠^\circ)}$

$\therefore \text{جا هـ} = \frac{١٦\sqrt{٣} \times \text{جا } ٣٠^\circ}{١٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ق(∠هـ) = ٦٠°

$\therefore \frac{١٦}{\text{جا } ٣٠^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا } (٦٠^\circ + ٣٠^\circ)}$ ∴ و = ٣٢ نيوتن.

على اتزان جسم تحت تأثير قوتين / ثلاث قوى متلاقية فى نقطة (قاعدة مثلث القوى - قاعدة لامى)



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

(٢) إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{ق_١} = \overleftarrow{ق_٢}$ (ب) $ق_١ = ق_٢$

(جـ) $\overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} \neq \overleftarrow{٠}$ (د) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ليسا على استقامة واحدة.

(٣) إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة قوى مستوية فإن أقل عدد من القوى تحدث الاتزان يساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) أقل عدد من القوى المستوية غير المتساوية فى المقدار يمكن أن يتزن هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ومتزنة فإن مقدار محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ يساوى ....

(أ) $ق_١$ (ب) $ق_١ + ق_٢$ (جـ) $ق_٣$ (د) صفر

(٦) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٧) إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) $٧\sqrt{٢}$

(٨) إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن واللتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) $\sqrt{١٩}$ (ب) $\sqrt{٣٤}$ (جـ) ٧ (د) ٦

(٩) أى من مجموعات القوى الآتية يمكن أن تكون متزنة ؟

(١) ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن. (٢) ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن ، ١٦ نيوتن.

(٣) ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن ، ٢٠ نيوتن.

(أ) (١) فقط. (ب) (٢) فقط. (جـ) (١) ، (٢) (د) (٢) ، (٣)

(١٠) أى من مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنة ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ١٠ نيوتن.

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

(١١) ثلاث قوى ليست على استقامة واحدة مستوية ومتلاقية فى نقطة متزنة فإذا كان مقدارى قوتين منهم هما ٧ ، ٣ نيوتن فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٣

(١٢) ثلاث قوى مستوية ومتزنة تؤثر فى نقطة مادية قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٦٠° ، بين الثانية والثالثة ١٥٠° فإن النسبة بين مقادير القوى هى ....

(أ) ١ : ١ : $\sqrt{3}$ (ب) ١ : ٢ : $\sqrt{3}$ (جـ) $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$: ١ (د) $\sqrt{3}$: $\sqrt{3}$: ١

(١٣) القوة التى تتزن مع القوتين المتعامدتين ق ، ق نيوتن قياس زاوية ميلها على إحدى القوتين = ...°

(أ) ٩٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٣٥ (د) ١٥٠

(١٤) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ٦ ، ٧ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فإذا كانت القوى متزنة فإن جيب تمام الزاوية بين القوتين الثانية والثالثة = ...

(أ) $\frac{٧}{٥}$ (ب) $\frac{-٥}{٧}$ (جـ) $\frac{١٥}{١٧}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٥) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى بالشكل المقابل فأى الجمل الآتية صحيحة ؟

(١) ق١ + ق٢ + ق٣ = صفر (٢) $\overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣} = \overrightarrow{صفر}$

(٣) $\frac{ق_١}{جا\,\theta_١} = \frac{ق_٢}{جا\,\theta_٢} = \frac{ق_٣}{جا\,\theta_٣}$

(أ) (١) ، (٢) فقط. (ب) (٢) ، (٣) فقط.

(جـ) (٣) فقط. (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(١٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت المجموعة متزنة فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٢

(جـ) ٢٠ (د) ١٣

(١٧) أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاثة الموضحة بالشكل المقابل حيث ق تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠°

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا ١٢٠°

(١٨) في الشكل المقابل :

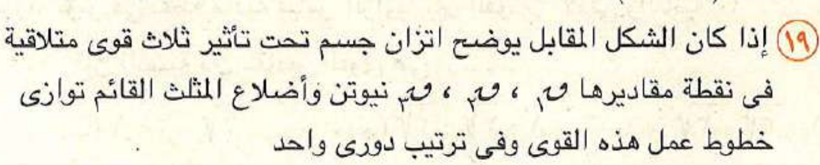
ثلاث قوى متزنة مقاديرها ق ، ك ، ٤ $\sqrt{2}$ نيوتن

، ق (∠ب أ حـ) = ٩٠° ، ق (∠ب أ ء) = ١٣٥°

فإن : (ق ، ك) = ...

(أ) (٤ ، ٤) (ب) (٤ ، $\sqrt{2}$ ٢)

(جـ) ($\sqrt{2}$ ، ٤) (د) (٢ ، ٢)



(١٩) إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة مقاديرها ق١ ، ق٢ ، ق٣ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازي خطوط عمل هذه القوى وفي ترتيب دوري واحد

فإن ق١ : ق٢ : ق٣ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

(٢٠) في الشكل المقابل :

جسم وزنه ٩٠ ث.جم معلق في نهاية خيط طوله ٣٠ سم جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٢٤ سم من الحائط

فإن : ش − ق = ... ث.جم.

(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٥٠ (د) ٣٠

(٢١) في الشكل المقابل :

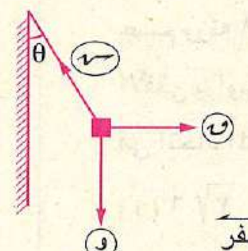
مصباح وزنه ٢٨٠ ث.جم معلق في نهاية خيط اتزن بتأثير قوة عمودية على الخيط عندما يميل الخيط على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠°

فإن : $\frac{ق}{ش}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\sqrt{3}$



(٢٢) فى الشكل المقابل :

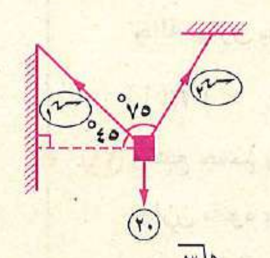


علق ثقل مقداره (و) نيوتن فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى وشد الثقل بقوة أفقية مقدارها (ق) نيوتن فاتزن عندما كان الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها θ أى الجمل الآتية غير صحيح فى وضع الاتزان ؟

(أ) ق = و ظا θ (ب) $\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ش} = \overrightarrow{صفر}$

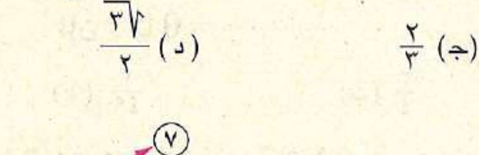
(جـ) ش^2 = ق^2 + و^2 (د) ش = ق + و

(٢٣) فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ٢٠ ث.كجم متزن

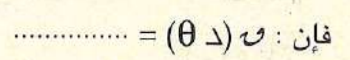
فإن : $\frac{ش_1}{ش_2}$ = ...



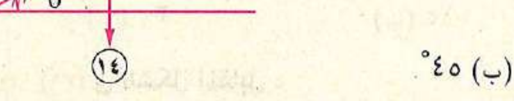
(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٢٤) فى الشكل المقابل :

الجسم متزن على مستوى مائل أملس



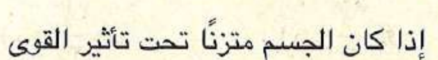
فإن : ق(د θ) = ...



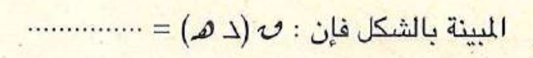
(أ) ٦٠° (ب) ٤٥°

(جـ) ٣٠° (د) ٧٥°

(٢٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزنًا تحت تأثير القوى

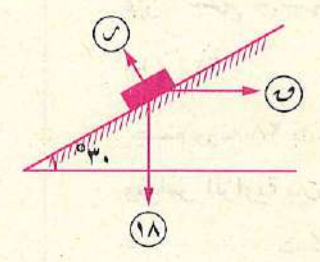


المبينة بالشكل فإن : ق(د هـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥° (د) ١٥°

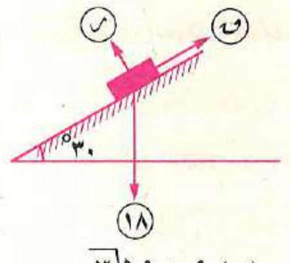
(٢٦) فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة أفقية مقدارها ق نيوتن.

فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) $6\sqrt{3}$ (ب) $12\sqrt{3}$ (جـ) $18\sqrt{3}$ (د) $24\sqrt{3}$



(٢٧) في الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة مقدارها ق نيوتن فى اتجاه المستوى لأعلى فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) $٦\sqrt{٣}$ (ب) $٩\sqrt{٣}$ (جـ) $١٨\sqrt{٣}$ (د) $٩ + ٩\sqrt{٣}$

(٢٨) وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية فإن مقدار هذه القوة الأفقية = ... ث.كجم.

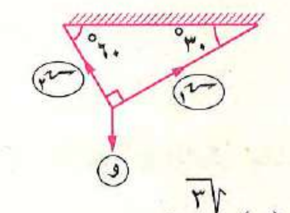
(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $٢\sqrt{٣}$ (جـ) $٤\sqrt{٣}$ (د) ٦

(٢٩) وضع جسم وزنـه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن بقـوة مقدارها ٤٩ نيوتن وتصنـع مع اتجـاه خط أكبر ميل للمستوى زاويـة قياسها θ لأعلى فإن : جتا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤٩}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٣٠) وضع جسم يزن ٢٠ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ى حيث جا ى = $\frac{٣}{٥}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة أفقية ق فإن : ق = ... ث.كجم.

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) $٥\sqrt{٣}$

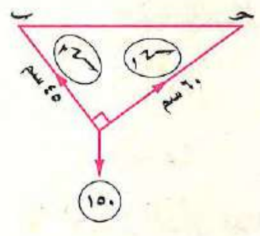


(٣١) في الشكل المقابل :

ثقل مقداره (و) معلق بخيطين يميلان على الأفقى بالزاويتين الموضحتين

فإن : $ش_١$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ و (ب) $\frac{١}{٢}$ و (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ و (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ و



(٣٢) في الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقى واحد

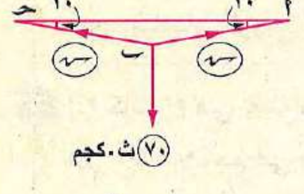
فإن : $ش_٢ - ش_١$ = ... ث.جم.

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

(٣٣) جسم وزنه ٢٨ ث.كجم معلق بواسطة خيطين مثبت طرفاهما الآخران ، فإذا كان الخيطان متعامدين وقياس الزاوية بين أحدهما وخط عمل وزن الجسم ١٢٠° فإن مقدار الشد فى هذا الخيط = ... ث.كجم.

(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) $١٤\sqrt{٣}$ (د) $٢٨\sqrt{٣}$

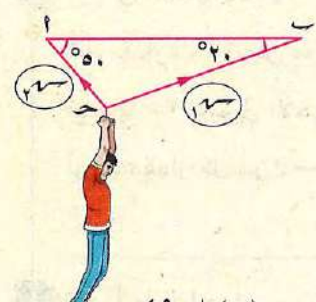
(٣٤) في الشكل المقابل :

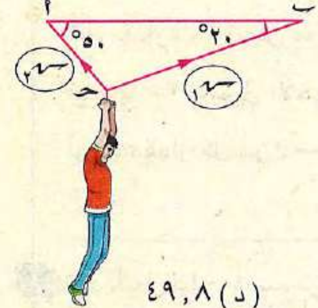


يسير رجل وزنه ٧٠ ث.كجم على حبل فإذا انخفض طرفا الحبل عن الأفقي بزاوية قياسها ١٠° عندما وصل الرجل إلى منتصف الحبل فإن قيمة الشد في الحبل (ش) = ... ث.كجم.

(أ) $\frac{٧٠ \text{ جا } ٢٠°}{\text{جا } ١٠٠°}$ (ب) $\frac{٧٠ \text{ جا } ١٠٠°}{\text{جا } ١٦٠°}$ (جـ) $\frac{٧٠ \text{ جتا } ١٠٠°}{\text{جتا } ١٦٠°}$ (د) $\frac{\text{جا } ١٠٠°}{٧٠ \text{ جا } ١٦٠°}$

(٣٥) في الشكل المقابل :



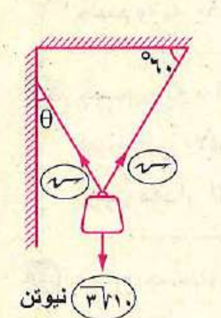


تعلق رجل وزنه (و) ث.كجم رأسيًا من نقطة حـ ومثبت بواسطة حبلين حـب ، حـأ كما بالشكل وكان $ش_١$ = ٦٠ ث.كجم

فإن : (و) = ... ث.كجم.

(أ) ٨٧,٧ (ب) ٧٠,٦ (جـ) ٦٠ (د) ٤٩,٨

(٣٦) علق جسم وزنه $١٠\sqrt{٣}$ نيوتن بواسطة خيطين كما بالشكل المقابل فإن قيمة θ التي تجعل الشد في الخيطين متساوٍ هي ....



(أ) ١٥° (ب) ٣٠°

(جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ ثلاث قوى متلاقية في نقطة مقاديرها $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ٧٥ نيوتن وأمكن تمثيلها بالقطع $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـأ}$ على الترتيب من Δ أبحـ الذي فيه : أب = ٣ سم ، بحـ = ٤ سم ، حـأ = ٥ سم

أوجد قيمة كل من : $ق_١$ ، $ق_٢$ «٤٥ ، ٦٠ نيوتن»

٢ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية في نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° فأوجد مقدار كل من : ق ، ك «٣٠ ، $٣٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

٣ وضع جسم وزنه ١٢ ثقل.كجم على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازن الجسم بواسطة قوة أفقية. أوجد مقدار القوة ورد فعل المستوى. «$٤\sqrt{٣}$ ، $٨\sqrt{٣}$ ث.كجم»

٤ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم في حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى. «٧٢ ، $٣٦\sqrt{٣}$ نيوتن»

٥ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ = ٨ ث.جم ، $ق_٢$ = ٤ $\sqrt{٣}$ ث.جم ، $ق_٣$ = ٤ ث.جم
أوجد قياسات الزوايا الثلاثة بين خطوط عمل القوى الثلاثة. علمًا بأن المجموعة متزنة. «٩٠° ، ١٢٠° ، ١٥٠°»

---

٦ إذا كانت م هى نقطة تقاطع قطرى المربع أ ب حـ ء ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{بحـ}$ ، وكانت $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ٤٢ ث.جم هى مقادير ثلاث قوى متزنة تؤثر فى $\overleftarrow{مهـ}$ ، $\overleftarrow{مو}$ ، $\overleftarrow{مء}$
احسب قيمة كل من : $ق_١$ ، $ق_٢$ «٢١ $\sqrt{٢}$ ، ٢١ $\sqrt{٢}$ ث.جم»

---

٧ في الشكل المقابل :
ثقل مقداره ١٠ نيوتن معلق بخيطين يميل الأول على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ويميل الآخر على الأفقى بزاوية قياسها ٤٠°
أوجد مقدار كل من : $ش_١$ ، $ش_٢$ فى حالة الاتزان.

$ش_٢$ $ش_١$ ٤٠° ٣٠° ١٠

«٨,١٥ ، ٩,٢١٦ نيوتن»

---

٨ ثبت خيط طوله ٤٠ سم من نهايتيه فى نقطتين على مستقيم أفقى واحد البعد بينهما ٣٢ سم وعلق فى منتصف الخيط جسم وزنه ١٨٠ ث.كجم. أوجد مقدار الشد فى كل من جزأى الخيط. «١٥٠ ، ١٥٠ ث.كجم»

---

٩ جسم وزنه ١٥ ثقل كجم موضوع على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢}$ ، أثرت عليه قوة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فحفظته فى حالة توازن.
أوجد مقدار القوة ورد الفعل العمودى على المستوى. «٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ث.كجم»

---

١٠ وضع جسم وزنه (و) ثقل كجم على مستوٍ أملس يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{١}{٢}$ وحفظ فى حالة توازن بقوة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.
أوجد مقدار القوة وكذلك رد فعل المستوى بدلالة (و). «ق = ر = و»

---

١١ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى وضع الاتزان. «١٦٠ ، ١٢٠ ث.جم»

---

١٢ علق جسم وزنه ٦,٥ نيوتن بواسطة خيطين طول أحدهما ٠,٥ متر وطول الآخر ١,٢ متر وربط الخيطان فى نقطتين من مستقيم أفقى بحيث كانا متعامدين. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى وضع الاتزان.
«٦ ، ٢,٥ نيوتن»

---

١٣ علق ثقل قدره ٥٠ ثقل جرام بواسطة خيطين متعامدين فإذا كان الشد فى الخيطين هما ٢٥ $\sqrt{٣}$ ، ٢٥ ثقل جرام.
فأوجد قياس الزاوية التى يميل بها كل من الخيطين على الرأسى فى وضع الاتزان. «٣٠° ، ٦٠°»

---

١٤ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم من طرف خيط خفيف مثبت طرفه الآخر فى سقف حجرة ثم جذب الثقل بقوة أفقية حتى أصبح الخيط مائلًا على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°
عين مقدار كل من القوة الأفقية والشد فى الخيط. «$\frac{٢٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٤٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم»

١٥ ثقل قدره ٦٠ ثقل جم مربوط فى أحد طرفى خيط خفيف والطرف الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى. أثرت قوة أفقية مقدارها ق على الثقل فى اتجاه عمودى على الحائط فاتزن الثقل عندما كان الخيط يميل على الحائط بزاوية قياسها هـ حيث ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ أوجد مقدار ق والشد فى الخيط. «٤٥ ، ٧٥ ث.جم»

---

١٦ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف مثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة فى اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح الخيط فى وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط. «٨ ، ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

١٧ أُزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ ث.جم حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط.
أوجد مقدار القوة ومقدار الشد فى الخيط فى وضع الاتزان. «٣٠٠ ، ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم»

---

١٨ خيط خفيف طوله ١٧٠ سم ثبت طرفه أ فى سقف حجرة وعلق من الطرف الآخر ب مصباح وزنه ٣٤ ث.جم. أوجد مقدار الشد والقوة اللازمة لجعل المصباح متزنًا وهو على بعد ٨٠ سم أسفل سقف الحجرة فى كل من الحالتين الآتيتين :

(١) إذا كانت القوة أفقية. «٧٢,٢٥ ، ٦٣,٧٥ ث.جم»

(٢) إذا كانت القوة عمودية على $\overline{أب}$ «١٦ ، ٣٠ ث.جم»

---

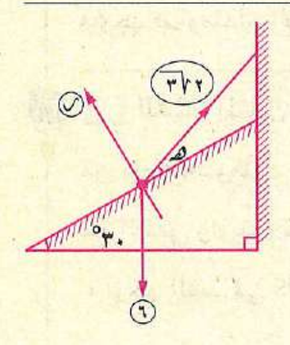
١٩ وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ وحفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن وتميل على خط أكبر ميل للمستوى بزاوية لها نفس القياس هـ لأعلى. أوجد قيمة هـ ورد فعل المستوى على الجسم. «٣٠° ، ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٢٠ جسم فى حالة توازن على مستوى مائل أملس تحت تأثير قوة تعمل فى اتجاه المستوى إلى أعلى ومقدارها يساوى نصف مقدار وزن الجسم. أوجد قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ورد فعل المستوى. «٣٠° ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ و»

---

٢١ فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ٦ ث.كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازنه بواسطة قوة شد مقدارها ٢ $\sqrt{٣}$ ث.كجم تعمل فى خيط مثبت أحد طرفيه بالجسم والطرف الآخر فى حائط رأسى. أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع المستوى ومقدار رد فعل المستوى على الجسم. «٣٠° ، ٢ $\sqrt{٣}$ ث.كجم»

٢٢ وضع جسم وزنه ٣٠٠ ثقل جرام على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.

أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد فعل المستوى. «$100\sqrt{3}$ ، $100\sqrt{3}$ ث.جم»

---

٢٣ وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث.جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = ٠,٦ وحفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية.

أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم. «٦٠٠ ، ١٠٠٠ ث.جم»

---

٢٤ خيط أملس طوله ٣٠ سم ، ربط من طرفيه فى نقطتين أ ، ب بحيث كان $\overline{أب}$ أفقيًا وطوله = ١٨ سم فإذا انزلقت حلقة ملساء وزنها ١٥٠ ثقل جم على الخيط.

أثبت أنه فى وضع التوازن يكون طولا فرعى الخيط متساويين ثم أوجد الشد فى كل منهما. «٩٣,٧٥ ث.جم»

---

٢٥ جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق فى أحد طرفى خيط طوله ١٣٠ سم. وطرفه الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى. أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط إذا أثرت على الجسم قوة أفقية فاتزن :

(١) عندما يكون الجسم على بعد ٥٠ سم من الحائط. «١٠ ، ٢٦ نيوتن»

(٢) عندما يميل الخيط على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° «$8\sqrt{3}$ ، $16\sqrt{3}$ نيوتن»

---

٢٦ علق وزن مقداره ٧٢ ثقل جرام فى أحد طرفى خيط وثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة أ على حائط رأسى. ربط خيط ثان عند نقطة ب من الخيط الأول تبعد عن أ بمقدار ٢٥ سم وشد فى اتجاه أفقى حتى صارت النقطة ب على بعد ٧ سم من الحائط.

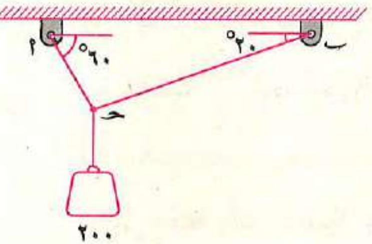
أوجد قوة الشد فى الخيط الأفقى وفى كل من جزأى الخيط الأول. «٢١ ، ٧٥ ، ٧٢ ث.جم»

---

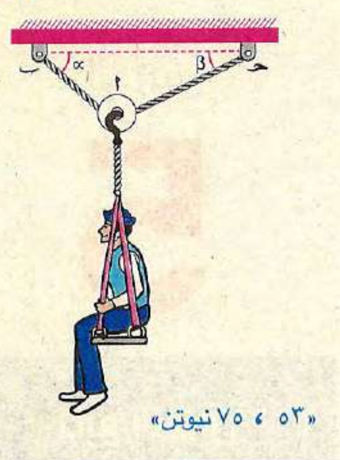
٢٧ علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويميل الخيط الآخر على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط الأول يساوى ١٠٠ ث.جم. فأوجد هـ ومقدار الشد فى الخيط الثانى. «٦٠° ، $100\sqrt{3}$ ث.جم»

---

٢٨ الشكل المقابل يبين ثقل مقداره ٢٠٠ نيوتن معلق رأسيًا من نقطة حـ ومثبت بواسطة حبلين $\overline{بحـ}$ ، $\overline{أحـ}$ يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٢٠° ، ٦٠° فإذا كانت المجموعة متزنة ، أوجد الشد فى كل من الحبلين لأقرب نيوتن.



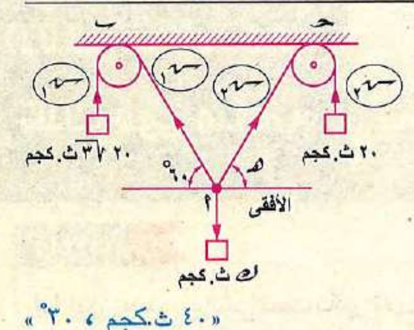
«١٠٢ ، ١٩١ نيوتن»



٢٩ الربط بالملاحة البحرية :

يجرى إنقاذ بحار باستخدام كرسى القبطان وذلك بتعليقه فى بكرة يمر عليها حبلان $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ كما فى الشكل المجاور فإذا كان قياسا زاويتى α ، β مع الأفقى ٢٥° ، ١٥° على الترتيب وكان الشد فى الخيط $\overline{أب}$ يساوى ٨٠ نيوتن. فأوجد وزنى البحار والكرسى معًا ، وكذلك الشد فى الخيط $\overline{أحـ}$ فى وضع الاتزان.

«٥٣ ، ٧٥ نيوتن»



٣٠ فى الشكل المقابل :

ثقل مقداره ك معلق فى طرف خيط وينتهى طرف الخيط بخيطين يمران على بكرتين ملساوين عند ب ، حـ ويحملان ثقلين مقداراهما ٢٠ √٣ ، ٢٠ ث.كجم

أوجد مقدار الثقل ك ، قياس زاوية هـ فى وضع الاتزان.

«٤٠ ث.كجم ، ٣٠°»

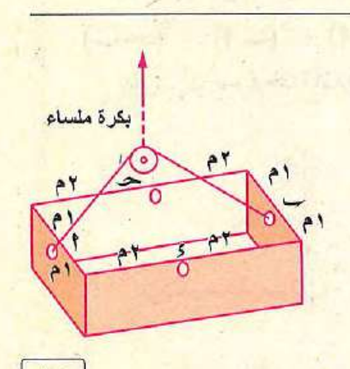
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ جسم وزنه ٤٠٠ ثقل جرام معلق من نقطة أ بواسطة خيط ، ربط خيط فى نقطة ب من الخيط وشد أفقيًا بخيط ثان $\overline{بحـ}$ يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة ويتدلى فى نهايته ثقل مقداره ٣٠٠ ثقل جرام.

أوجد ميل $\overline{أب}$ على الرأسى والشد فى كل من الخيطين $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ «٥٢َ ٣٦° ، ٣٠٠ ، ٥٠٠ ث.جم»

٢ $\overline{أب}$ خيط خفيف مثبت طرفاه فى نقطتين من مستقيم أفقى ، علق فى نقطتين حـ ، ء من الخيط ثقلان مقداراهما ك ، ٢٠ ثقل كجم على الترتيب فإذا اتزنت المجموعة فى وضع كان فيه $\overline{حـء}$ أفقيًا وكان جزءا الخيط $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ يميلان على الرأسى بزاويتين قياساهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب.

فأوجد الشد فى كل من أجزاء الخيط الثلاثة وقيمة ك «٤٠ √٣ ، ٢٠ √٣ ، ٤٠ ث.كجم ، ك = ٦٠ ث.كجم»



٣ علق صندوق وزنه ٢٠ نيوتن بين طرفى حبل يمر على بكرة ملساء كما هو موضح بالشكل المقابل ، فإذا أمكن تثبيت الصندوق بالحبل بطريقتين أحدهما من أ ، ب والأخر من حـ ، ء فأى الطريقتين يمكن أن ينتج عنها أقل شد فى الحبل بحيث تتزن المجموعة ؟



الدرس 5

تابع الاتزان (تلاقى خطوط عمل ثلاث قوى متزنة)

قاعدة ٤

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة.

فمثلًا فى الشكل المقابل :

إذا اتزن قضيب منتظم وزنه (و) على حائط رأسى أملس وأرض أفقية خشنة فإن :

١ وزن القضيب يؤثر فى منتصفه واتجاهه رأسيًا لأسفل (مركز ثقله).

٢ رد فعل الحائط الرأسى الأملس (ر$_1$) يكون عموديًا على الحائط ويعمل فى $\overleftarrow{بء}$

٣ رد فعل الأرض الأفقية الخشنة (ر$_2$) غير محدد الاتجاه ولتحديد اتجاهه نرسم $\overleftarrow{أء}$ الذى يمر بالنقطة ء (نقطة تلاقى خطى عمل $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ر_1}$)

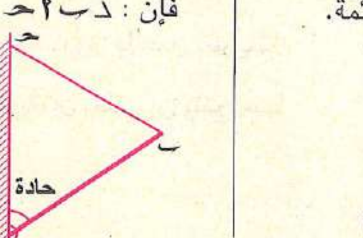
ملاحظـــات

١ وزن الكرة المتجانسة يؤثر فى مركزها الهندسى (مركز ثقل الكرة).

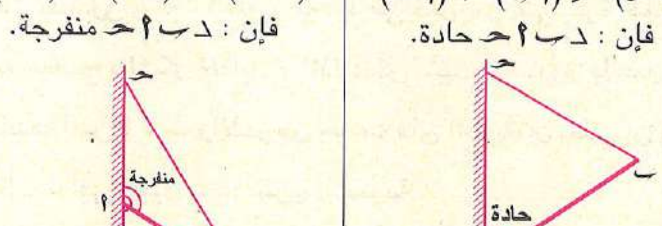
٢ إذا كان $\overline{أب}$ قضيبًا يتصل طرفه أ بمفصل فى حائط وربط الطرف ب بواسطة خيط ثبت فى النقطة ح التى تقع أعلى أ تمامًا وكان :

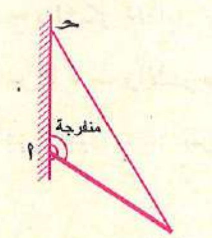
(ب ح)^2 = (أ ب)^2 + (أ ح)^2
فإن : ∠ ب أ ح قائمة.

(ب ح)^2 < (أ ب)^2 + (أ ح)^2
فإن : ∠ ب أ ح حادة.



(ب ح)^2 > (أ ب)^2 + (أ ح)^2
فإن : ∠ ب أ ح منفرجة.

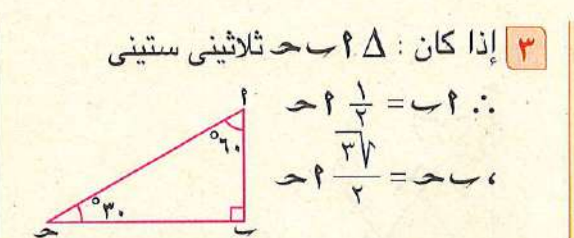




٣ إذا كان : Δ أ ب ح ثلاثيني ستيني

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ ح

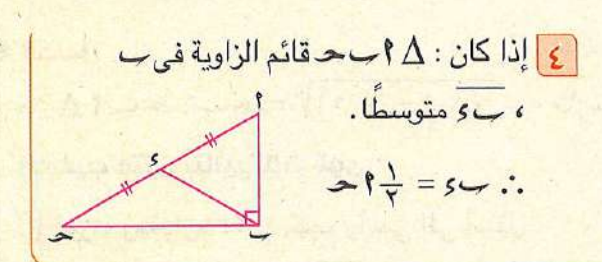
، ب ح = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أ ح



٤ إذا كان : Δ أ ب ح قائم الزاوية فى ب

، $\overline{ب ء}$ متوسطًا.

∴ ب ء = $\frac{1}{2}$ أ ح

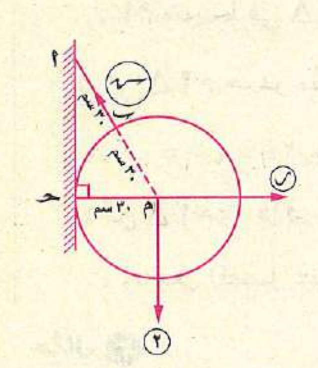


مثال ١

كرة معدنية وزنها ٢ ثقل كجم وطول نصف قطرها ٣٠ سم ربطت من نقطة ب على سطحها بخيط طوله ٣٠ سم ومربوط طرفه الآخر أ من نقطة فى حائط رأسى أملس فاتزنت الكرة وهى مستندة على الحائط. أوجد مقدار الشد فى الخيط ومقدار رد فعل الحائط.

الحـــل

الكرة متزنة بتأثير القوى الثلاث :



١ وزن الكرة ومقداره ٢ ثقل كجم ويؤثر رأسيًا إلى أسفل من مركز الكرة (م).

٢ رد فعل الحائط ومقداره ر ويؤثر عند نقطة ارتكاز الكرة على الحائط وهى نقطة ح وفى اتجاه عمودى على الحائط فهو يمر بمركز الكرة (م).

٣ الشد فى الخيط ومقداره (ش) ويعمل فى الخيط فى اتجاه $\overleftarrow{ب أ}$

∵ خطى عمل قوتى الوزن ورد فعل الحائط يتقاطعان فى (م)

∴ قوة الشد فى الخيط يجب أن يمر خط عملها بالنقطة (م)

أى أن $\overleftrightarrow{أ ب}$ يمر بالنقطة (م) ويكون Δ م أ ح هو مثلث القوى حيث

م أ = م ب + ب أ = ٦٠ سم ، ح م = ٣٠ سم ∴ Δ أ م ح ثلاثينى ستينى.

∴ أ ح = $30\sqrt{3}$ سم ∴ $\frac{ش}{60} = \frac{ر}{30} = \frac{2}{30\sqrt{3}}$

∴ ش = $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ثقل كجم ، ر = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ثقل كجم.

- حاول أن تحل هذا المثال باستخدام قاعدة لامى.

مثال ٢

$\overline{أ ب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٢٤ ثقل كجم يؤثر فى نقطة (ء) منتصف $\overline{أ ب}$ ، والقضيب متصل طرفه (أ) بمفصل فى حائط رأسى وطرفه ب مربوط فى إحدى نهايتى خيط خفيف مثبت نهايته الأخرى فى نقطة (ح) على الحائط تقع فوق أ تمامًا وعلى بُعد ٨٠ سم من أ فإذا اتزن القضيب فى وضع أفقى. فأوجد مقدار الشد فى الخيط ومقدار واتجاه رد فعل المفصل عند أ

الحــل

من Δ أ ب حـ : ب حـ = $\sqrt{(٦٠)^٢ + (٨٠)^٢}$ = ١٠٠ سم

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

١ وزنه ومقداره ٢٤ ث.كجم رأسى إلى أسفل
ويؤثر عند (ء) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

٢ الشد فى الخيط ومقداره (ش) ويعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

٣ رد فعل المفصل عند أ ومقداره (ر).

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن والشد يتلاقيان فى نقطة م

∴ خط عمل قوة رد فعل المفصل يمر بالنقطة م أيضًا

∵ ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء م}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$ ∴ م منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ $\overline{\text{أ م}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى أ   ∴ أ م = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٥٠ سم

، ∵ Δ أ م حـ هو مثلث القوى : ∴ $\frac{\text{ش}}{\text{م حـ}} = \frac{\text{ر}}{\text{أ م}} = \frac{٢٤}{\text{حـ أ}}$ أى $\frac{\text{ش}}{٥٠} = \frac{\text{ر}}{٥٠} = \frac{٢٤}{٨٠}$

∴ ر = ش = ٢٤ × $\frac{٥٠}{٨٠}$ = ١٥ ث.كجم

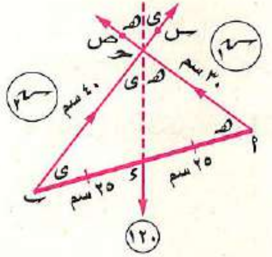
، من Δ أ م ء : ظا هـ = $\frac{٤٠}{٣٠} = \frac{٤}{٣}$ ∴ هـ ≃ ٨َ ٥٣°

∴ رد فعل المفصل عند أ يميل على القضيب بزاوية قياسها ٨َ ٥٣°

مثال ٣

قضيب منتظم طوله ٥٠ سم ووزنه ١٢٠ ث.جم علق من طرفيه تعليقًا خالصاً بواسطة خيطين ثبت طرفاهما فى نقطة واحدة فإذا كان طولا الخيطين ٣٠ سم ، ٤٠ سم على الترتيب.
فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

الحــل



القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى مقاديرها :

$\text{ش}_١$ ، $\text{ش}_٢$ ، ١٢٠ ث.جم حيث $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ خط عمل $\overleftarrow{\text{ش}_١}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ خط عمل $\overleftarrow{\text{ش}_٢}$ وهما متقاطعان فى حـ

∴ قوة الوزن لابد وأن يمر خط عملها بنقطة حـ أيضًا.

، ∵ $(\text{أ ب})^٢$ = ٢٥٠٠ ، $(\text{أ حـ})^٢ + (\text{حـ ب})^٢$ = ٩٠٠ + ١٦٠٠ = ٢٥٠٠

∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠°

، ∵ ء منتصف الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ ء حـ = ء أ = ء ب

∴ ق (∠ ٢ حـ ء) = ق (∠ ء ٢ حـ) ، ق (∠ ء حـ ب) = ق (∠ ء ب حـ)

وبتطبيق قاعدة لامى يكون : $\frac{ش_١}{جا (ى)} = \frac{ش_٢}{جا (هـ)} = \frac{١٢٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_١}{\frac{٣٠}{٥٠}} = \frac{ش_٢}{\frac{٤٠}{٥٠}} = ١٢٠$

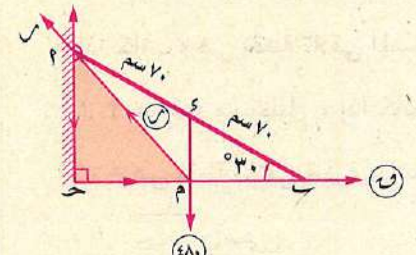
∴ ش١ = ١٢٠ × $\frac{٣٠}{٥٠}$ = ٧٢ ثقل جم ، ش٢ = ١٢٠ × $\frac{٤٠}{٥٠}$ = ٩٦ ثقل جم.

مثال ٤

$\overline{٢ب}$ قضيب منتظم طوله ١٤٠ سم ووزنه ٤٨٠ ث.جم يتصل طرفه ٢ بمفصل مثبت فى حائط رأسى. أثرت فى طرفه الآخر ب القوة $\overleftarrow{ق}$ فى الاتجاه الأفقى فاتزن القضيب فى وضع يكون فيه مائلًا على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار القوة $\overleftarrow{ق}$ ومقدار واتجاه رد فعل المفصل عند ٢

الحـــل

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :



١ وزنه ومقداره ٤٨٠ ث.جم رأسيًا إلى أسفل

ويؤثر عند (ء) منتصف $\overline{٢ب}$

٢ القوة الأفقية $\overleftarrow{ق}$ عند ب

٣ رد فعل المفصل عند ٢ ومقداره (ر)

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن والقوة الأفقية يتلاقيان فى النقطة م

∴ خط عمل قوة رد فعل المفصل يمر بالنقطة م أيضًا (أى فى اتجاه $\overleftrightarrow{م٢}$)

∴ Δ حـ م ٢ هو مثلث القوى.

∴ $\frac{ق}{حـ م} = \frac{ر}{م ٢} = \frac{٤٨٠}{٢ حـ}$

، ∵ ق (∠ ٢ ب حـ) = ٣٠°

∴ ٢ حـ = $\frac{١}{٢}$ ٢ ب = ٧٠ سم

، ب حـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ٢ ب = ٧٠ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ ء منتصف $\overline{٢ب}$ ، $\overrightarrow{ءم}$ // $\overline{٢حـ}$

∴ م منتصف $\overline{ب حـ}$

∴ م حـ = ٣٥ $\sqrt{٣}$ سم

∴ ٢ م = $\sqrt{(٧٠)^٢ + (٣٥\sqrt{٣})^٢}$ = ٣٥ $\sqrt{٧}$ سم

∴ $\frac{ق}{٣٥\sqrt{٣}} = \frac{ر}{٣٥\sqrt{٧}} = \frac{٤٨٠}{٧٠}$

∴ ق = ٢٤٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم ، ر = ٢٤٠ $\sqrt{٧}$ ث.جم.

، ∵ Δ ٢ م حـ قائم الزاوية فى حـ

∴ ظا (∠ ٢ م حـ) = $\frac{٢ حـ}{م حـ} = \frac{٧٠}{٣٥\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

∴ ق (∠ ٢ م حـ) ≃ ٤٩° ٦

∴ رد فعل المفصل يصنع زاوية قياسها ٤٩° ٦ مع الأفقى.

مثال ٥

قضيب منتظم يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° أوجد قياس الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى فى وضع التوازن وإذا كان مقدار وزن القضيب يساوى ٢٤ نيوتن عين مقدار رد فعل كل من المستويين.

الحـــل

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

١ الوزن ٢٤ نيوتن رأسيًا إلى أسفل ويؤثر عند (م) منتصف $\overline{أب}$

٢ رد فعل المستوى الأول $ر_1$

٣ رد فعل المستوى الثانى $ر_2$

، ∵ خطى عمل قوتى رد الفعل يتلاقيان فى النقطة حـ

∴ خط عمل قوة الوزن يمر بالنقطة حـ أيضًا.

فإذا كانت ء هى نقطة تلاقى المستويين فإن ∠ أ ، ∠ ء ، ∠ ب قوائم.

∴ أ حـ ب ء مستطيل ، إذا كانت م هى منتصف $\overline{أب}$

∴ م هى نقطة تلاقى قطرى المستطيل ∴ $\overline{حـ ء}$ قطر المستطيل يمر بالنقطة م

، ∵ $\overline{حـ ء}$ رأسى. ∴ ق (∠ حـ ء س) = ٩٠°

∴ ق (∠ م ء أ) = ٣٠°

، ∵ م ء = م أ ∴ ق (∠ ء أ م) = ٣٠°

، ∵ ق (∠ ص أ ء) = ٦٠° ∴ ق (∠ ص أ م) = ٣٠°

∴ القضيب يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الأفقى.

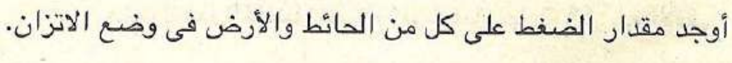
ومن Δ أ ء حـ : ∴ ق (∠ أ حـ ء) = ٦٠°

وبتطبيق قاعدة لامى يكون : ∴ $\frac{ر_1}{جا ١٥٠°} = \frac{ر_2}{جا ١٢٠°} = \frac{٢٤}{جا ٩٠°}$

∴ $ر_1$ = ١٢ نيوتن ، $ر_2$ = ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

مثال ٦

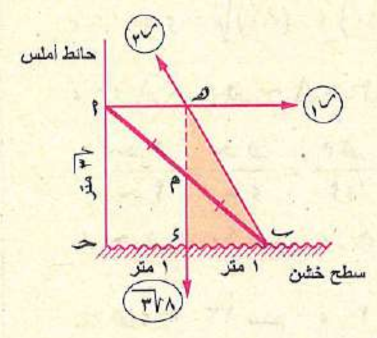
$\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ٨ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم ، يرتكز بطرفه العلوى أ على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية خشنة بحيث كان الطرف العلوى للسلم يبعد عن سطح الأرض بمقدار $\sqrt{٣}$ مترًا والطرف السفلى يبعد عن الحائط مسافة ٢ متر.



أوجد مقدار الضغط على كل من الحائط والأرض فى وضع الاتزان.

الحــل

السلم متزن بتأثير ثلاث قوى :



1. وزن السلم ومقداره $8\sqrt{3}$ ثقل كجم ويؤثر رأسيًا إلى أسفل من منتصف السلم (م).
2. رد فعل الحائط الأملس ومقداره ($ر_1$) وهو عمودى على الحائط عند أ
3. رد فعل الأرض الخشنة ومقداره ($ر_2$)

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن ورد فعل الحائط يتقاطعان فى نقطة (هـ) مثلاً.

∴ خط عمل قوة رد فعل الأرض لابد وأن يمر بالنقطة هـ أيضًا ويكون Δ ء ب هـ هو مثلث القوى حيث :

ء هـ = أ حـ = $\sqrt{3}$ مترًا ، ب ء = $\frac{1}{2}$ ب حـ = ١ مترًا.

، ب هـ = $\sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}$ = ٢ متر.

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى يكون :

$$\frac{ر_1}{ب ء} = \frac{ر_2}{ب هـ} = \frac{8\sqrt{3}}{ء هـ}$$

$$\therefore \frac{ر_1}{1} = \frac{ر_2}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

∴ $ر_1$ = ٨ ثقل كجم ، $ر_2$ = ١٦ ثقل كجم.

∴ الضغط على الحائط = ٨ ثقل كجم ، الضغط على الأرض = ١٦ ثقل كجم.

ملاحظــة

ضغط طرفى السلم على كل من الأرض والحائط يساوى مقدارًا ردى فعل الأرض والحائط على طرفى السلم.

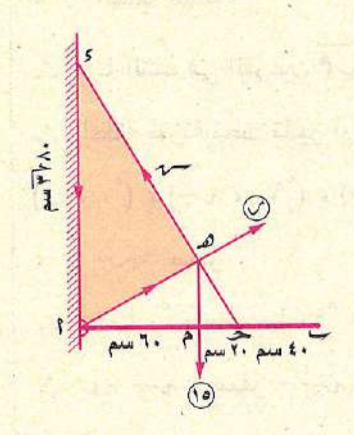
مثال ٧

$\overline{أ ب}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ١٥ ث.كجم ، يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى، حفظ القضيب فى وضع أفقى بربطه من إحدى نقطه حـ حيث أ حـ = ٨٠ سم بأحد طرفى خيط ، ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة ء على الحائط الرأسى فوق أ وعلى بعد $80\sqrt{3}$ سم منها.

احسب مقدار كل من الشد فى الخيط ورد فعل المفصل.

الحــل

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :



1. وزنه ١٥ ث.كجم ويؤثر رأسيًا إلى أسفل عند (م) منتصف $\overline{أ ب}$
2. قوة الشد فى الخيط ش
3. رد فعل المفصل (ر)

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن والشد يتلاقيان فى نقطة هـ

∴ خط عمل رد فعل المفصل يمر بالنقطة هـ أيضًا

∴ Δ أ هـ ء هو مثلث القوى.

، ∵ $\text{حـ ء} = \sqrt{(٨٠)^٢ + (٨٠\sqrt{٣})^٢} = ١٦٠$ سم

، ∵ Δ حـ م هـ ~ Δ حـ ٩ ء

∴ $\frac{\text{حـ م}}{\text{حـ ٩}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{٩ ء}}$ ∴ $\frac{٢٠}{٨٠} = \frac{\text{حـ هـ}}{١٦٠} = \frac{\text{م هـ}}{٨٠\sqrt{٣}}$

∴ حـ هـ = ٤٠ سم ، م هـ = $٢٠\sqrt{٣}$ سم

∴ هـ ء = ١٢٠ سم ، $\text{٩ هـ} = \sqrt{(٦٠)^٢ + (٢٠\sqrt{٣})^٢} = ٤٠\sqrt{٣}$ سم

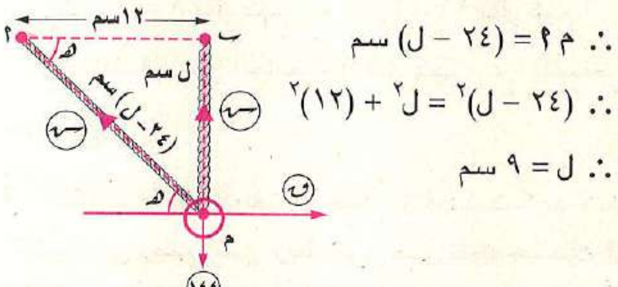
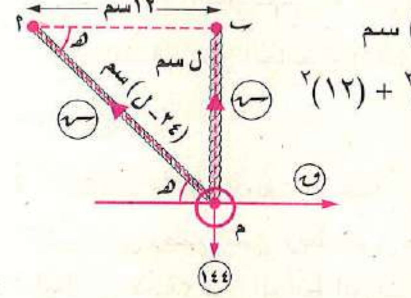
وبتطبيق قاعدة مثلث القوى : ∴ $\frac{\text{ر}}{٤٠\sqrt{٣}} = \frac{\text{ش}}{١٢٠} = \frac{١٥}{٨٠\sqrt{٣}}$

∴ ر = ٧,٥ ث.كجم ، ش = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ ث.كجم

مثال ٨

خيط طوله ٢٤ سم مثبت من نهايتيه فى مسمارين ٩ ، ب فى خط أفقى واحد البعد بينهما ١٢ سم. لضمت حلقة صغيرة ملساء وزنها ١٤٤ داين فى الخيط ثم جذبت بقوة أفقية $\overleftarrow{\text{ق}}$ حتى اتزنت رأسيًا أسفل ب أوجد مقدار الشد فى كل من فرعى الخيط ومقدار القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$

الحل

بفرض أن ب م = ل سم

∴ ٩ م = (٢٤ - ل) سم

، ∵ ق (∠ ٩ ب م) = ٩٠°

∴ $(٢٤ - \text{ل})^٢ = \text{ل}^٢ + (١٢)^٢$

∴ ٥٧٦ - ٤٨ ل + ل² = ل² + ١٤٤

∴ ل = ٩ سم

∴ م ب = ٩ سم ، ٩ م = ١٥ سم

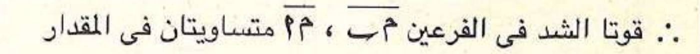
، وبفرض أن ق (∠ م ٩ ب) = هـ

∴ جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٣}{٥}$

، ∵ الحلقة ملساء

∴ قوتا الشد فى الفرعين $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م ٩}}$ متساويتان فى المقدار

∴ الحلقة متزنة تحت تأثير أربع قوى هى :



(ق ، ٠°) ، (ش ، ٩٠°) ، (ش ، ١٨٠° - هـ)، (١٤٤ ، ٢٧٠°)

> **لاحظ أن**
>
> الحلقة متزنة تحت تأثير أربع قوى وبالتالى تحل باستخدام طريقة التحليل السابق دراستها فى الدرس الثالث سـ = ٠ ، صـ = ٠.

، ∵ سـ = صفر

∴ ق جتا ٠° + ش جتا ٩٠° + ش جتا (١٨٠° - هـ) + ١٤٤ جتا ٢٧٠° = صفر

∴ ق + ش × صفر - ش جتا هـ + ١٤٤ × صفر = صفر

∴ ق − $\frac{٤}{٥}$ ش = ٠   (١)

، ∵ ص = صفر

∴ ق جا ٠° + ش جا ٩٠° + ش جا (١٨٠° − هـ) + ١٤٤ جا ٢٧٠° = صفر

∴ ق × صفر + ش × ١ + ش جا هـ + ١٤٤ × −١ = صفر

∴ ش + $\frac{٣}{٥}$ ش − ١٤٤ = ٠ ∴ ش $\left(١ + \frac{٣}{٥}\right)$ = ١٤٤

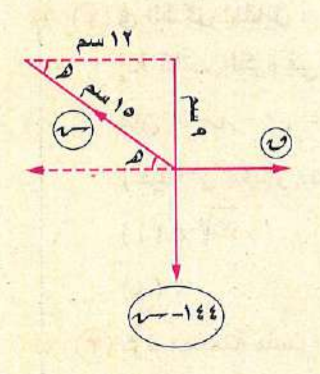
∴ ش = ٩٠ داين.

ومن (١) : ∴ ق = $\frac{٤}{٥}$ × ٩٠ = ٧٢ داين.

حل آخر :

∵ الوزن والشد الرأسى على استقامة واحدة

∴ يمكن تحصيلهما فى القوة (١٤٤ − ش) ونستخدم قاعدة لامى.



∴ $\frac{ق}{جا (٩٠° + هـ)} = \frac{ش}{جا ٩٠°} = \frac{١٤٤ − ش}{جا (١٨٠° − هـ)}$

∴ $\frac{ق}{جتا هـ} = \frac{ش}{١} = \frac{١٤٤ − ش}{جا هـ}$

∴ $\frac{ق}{\frac{٤}{٥}}$ = ش = $\frac{١٤٤ − ش}{\frac{٣}{٥}}$

∴ $\frac{٣}{٥}$ ش = ١٤٤ − ش

∴ $\frac{٨}{٥}$ ش = ١٤٤ ∴ ش = ٩٠ داين.

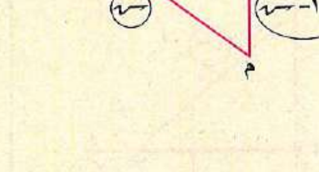
، ق = ٩٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٧٢ داين.

حل ثالث :

∵ الوزن والشد الرأسى على استقامة واحدة.

∴ يمكن تحصيلهما فى القوة (١٤٤ − ش)

ويصبح △ ا ب م هو مثلث القوى.



∴ $\frac{ق}{١٢} = \frac{ش}{١٥} = \frac{١٤٤ − ش}{٩}$

∴ $\frac{ش}{٥} = \frac{١٤٤ − ش}{٣}$

∴ ٣ ش = ٧٢٠ − ٥ ش ∴ ٨ ش = ٧٢٠

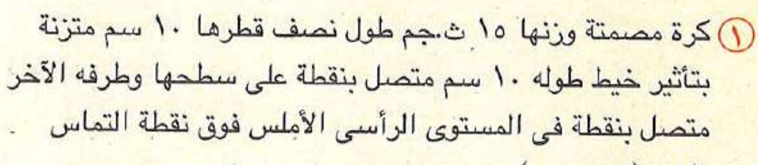
∴ ش = ٩٠ داين. ∴ $\frac{٩٠}{١٥} = \frac{ق}{١٢}$ ∴ ق = ٧٢ داين.

تمـارين 5 على تلاقى خطوط عمل ثلاث قوى متزنة

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

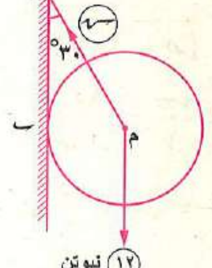


(١) كرة مصمتة وزنها ١٥ ث.جم طول نصف قطرها ١٠ سم متزنة بتأثير خيط طوله ١٠ سم متصل بنقطة على سطحها وطرفه الآخر متصل بنقطة فى المستوى الرأسى الأملس فوق نقطة التماس .

فإن : (ر ، ش) = ...

(أ) (٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ $\sqrt{٣}$) (ب) (٥ $\sqrt{٣}$ ، ١٠ $\sqrt{٣}$) (جـ) (٥ ، ١٠) (د) (٥ $\sqrt{٣}$ ، ٨ $\sqrt{٣}$)

(٢) **فى الشكل المقابل :**



إذا كانت الكرة فى وضع اتزان والحائط أملس

فإن : ش − ر = ... نيوتن.

(حيث ر مقدار رد فعل الحائط على الكرة)

(أ) ٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ٤ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٤ (د) ٨

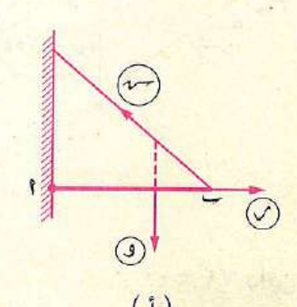
(٣) كرة مصمتة ملساء وزنها ٢٠ ث.جم طول نصف قطرها ٥ سم متزنة بربطها بخيط طوله ٥ سم مربوط بنقطة على سطحها وطرفه الآخر بنقطة فى المستوى الرأسى الأملس فوق نقطة التماس فإن رد فعل المستوى الرأسى ر = ... ث.جم.

(أ) $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$ (ب) ٢٠ (جـ) $\frac{٢٠}{\sqrt{٥}}$ (د) صفر

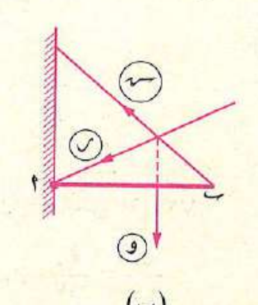
(٤) **فى الشكل المقابل :**

قضيب $\overline{أب}$ مثبت بمفصل عند أ من حائط رأسى أملس فإذا كان القضيب متزن

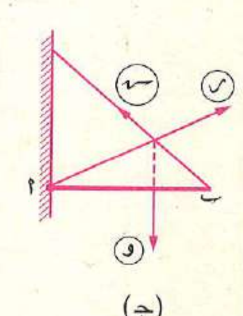
فأى من الأشكال الآتية يوضح اتجاه رد فعل المفصل ؟



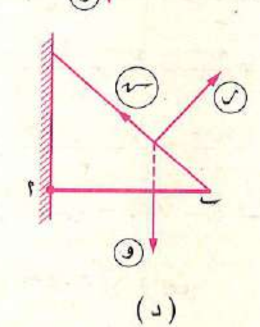
(أ)



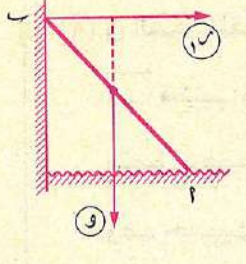
(ب)



(جـ)



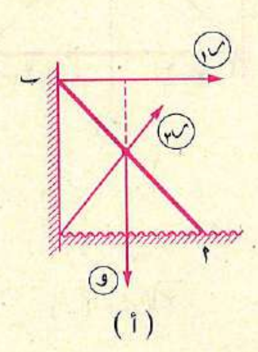
(د)

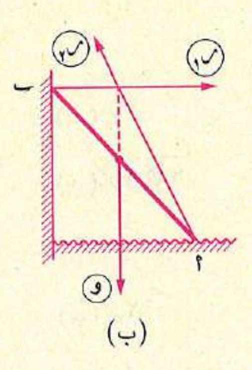


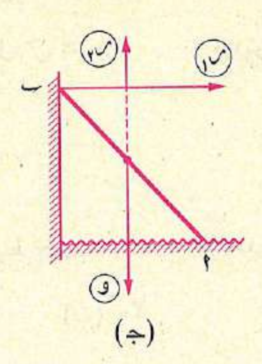
(٥) فى الشكل المقابل :

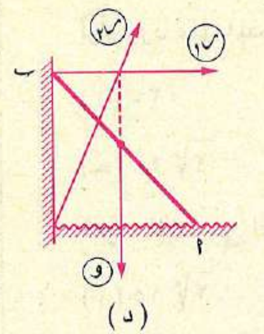
$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه و يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس

فأى من الأشكال الآتية يوضح الاتجاه الصحيح لرد فعل الأرض ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٦) فى الشكل المقابل :

اتجاه رد فعل المفصل على القضيب

عند أ ....

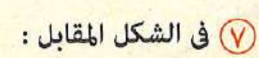
(أ) فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

(ب) فى اتجاه $\overleftarrow{أحـ}$

(جـ) ينصف $\overline{بحـ}$

(د) عمودى على $\overline{بحـ}$

(٧) فى الشكل المقابل :



ش١ : ش٢ : و = ...

(أ) ٥ : ٣ : ٤

(ب) ٣ : ٥ : ٤

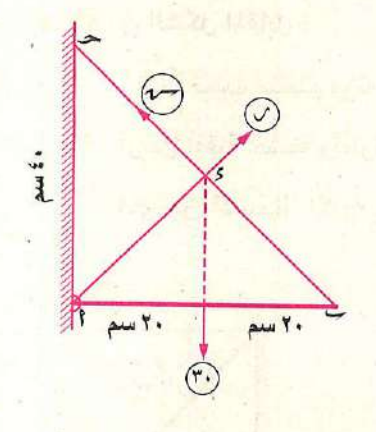
(جـ) ٤ : ٣ : ٥

(د) ٥ : ٤ : ٣

(٨) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن ، متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ ، والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم ، ومثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط أعلى أ ، اتزن القضيب فى وضع أفقى ، فإن رد فعل المفصل = ... نيوتن.

(أ) ١٠ $\sqrt{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ١٥ $\sqrt{٢}$



(٩) في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ، ووزنه ٣٠ نيوتن

متصل بمفصل عند أ ويتزن أفقيًا بخيط طرفاه عند ب

وعند حـ حيث حـ تقع رأسيًا فوق أ ، أحـ = ٤٠ سم

أولًا : رد فعل المفصل ر = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠

(جـ) ٤٠ $\sqrt{٢}$ (د) ١٥ $\sqrt{٢}$

ثانيًا : الشد في الخيط ش = ... نيوتن.

(أ) ١٥ $\sqrt{٢}$ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠ $\sqrt{٢}$

(١٠) ساق منتظمة وزنها ٢٠ نيوتن قابلة للحركة حول مفصل عند أحد طرفيها شدت جانبًا بقوة أفقية مقدارها ١٠ نيوتن تؤثر في طرفها الآخر فإن قياس زاوية ميل الساق على الرأسي عندما تتزن = ...

(أ) °٦٠ (ب) °٤٥ (جـ) °٣٠ (د) °٩٠

(١١) قضيب منتظم وزنه ٢٤ نيوتن يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقي زاويتين قياساهما °٦٠ ، °٣٠ فإن مقدار رد فعل كل من المستويين .... نيوتن.

(أ) ١٢ ، ١٥ (ب) ١٢ ، ١٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢ $\sqrt{٣}$ ، ١٠ (د) ١٥ ، ١٣

(١٢) في الشكل المقابل :

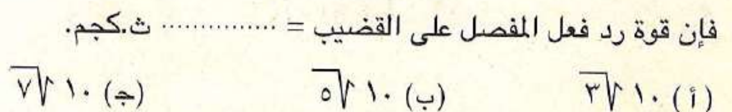
$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢ متر ووزنه ٢٠ ث.كجم

متصل بمفصل على حائط رأسي عند أ أثرت قوة أفقية

عند الطرف ب فإذا حفظ القضيب في وضع يميل

على الرأسي بزاوية قياسها °٦٠

فإن قوة رد فعل المفصل على القضيب = ... ث.كجم.



(أ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ $\sqrt{٥}$ (جـ) ١٠ $\sqrt{٧}$ (د) ٢٠ $\sqrt{٢}$



(١٣) الشكل المقابل يمثل كرة معدنية وزنها «و» ث.كجم موضوعة بحيث تمس مستويين أملسين كل منهما يميل على الرأسي بزاوية قياسها «هـ» إذا كانت الكرة تمس المستويين عند النقطتين أ ، ب فإن رد فعل المستوى عند النقطة أ يساوي .... ث.كجم.

(أ) $\frac{١}{٢}$ و (ب) و جا هـ قتا هـ (جـ) و جا هـ قتا ٢ هـ (د) و جتا هـ قتا ٢ هـ

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ كرة ملساء طول نصف قطرها ٣٠ سم ووزنها ٢٠٠ ثقل جرام تستند على حائط رأسى أملس ومعلقة بخيط طوله ٢٠ سم مثبت أحد طرفيه على سطح الكرة ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من الحائط تقع رأسيًا فوق نقطة تماس الكرة بالحائط.
أوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل الحائط فى وضع الاتزان. «٢٥٠ ، ١٥٠ ثقل جم»

٢ كرة ملساء وزنها ١٠ $\sqrt{3}$ ثقل جم تستند على حائط رأسى أملس ومعلقة من إحدى نقط سطحها بخيط مثبت طرفه الآخر فى نقطة من الحائط تقع رأسيًا فوق نقطة التماس وكان الخيط يصنع مع الرأسى زاوية قياسها ٣٠° أوجد الشد فى الخيط ورد فعل الحائط فى وضع الاتزان. «٢٠ ، ١٠ ثقل جم»

٣ كرة ملساء وزنها ١٥ نيوتن تستند على حائط أملس ومعلقة بخيط مثبت أحد طرفيه فى نقطة على سطحها وطرفه الآخر مربوط فى الحائط فى نقطة أعلى نقطة تماس الكرة تمامًا. فإذا كان طول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة. أوجد الضغط على الحائط والشد فى الخيط فى وضع الاتزان. «٥ $\sqrt{3}$ ، ١٠ $\sqrt{3}$ نيوتن»

٤ كرة معدنية وزنها ١٥ ثقل كجم موضوعة بحيث تمس مستويين أملسين أحدهما رأسى والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد رد فعل كل من المستويين. «١٥ $\sqrt{3}$ ، ٣٠ ثقل كجم»

٥ علق قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ١٠٠ سم ووزنه ٣٠ ثقل كجم من طرفيه أ ، ب بحبلين ثبت طرفاهما فى مسمار فى السقف فى نقطة حـ فإذا كان الحبلان متعامدين وطول أحـ = ٥٠ سم فأوجد فى وضع التوازن الشد فى كل من الحبلين. «١٥ ، ١٥ $\sqrt{3}$ ثقل كجم»

٦ علق قضيب منتظم طوله ١٣٠ سم ووزنه ٢٦ نيوتن من طرفيه تعليقًا مطلقًا فى خيطين مربوطين فى نقطة واحدة وكان طول أحدهما ٥٠ سم وطول الآخر ١٢٠ سم. ما هو الوضع الذى يكون فيه القضيب متزنًا ؟ وما هو مقدار الشد فى كل من الخيطين ؟ «٢٤ ، ١٠ نيوتن»

٧ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ ، حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند ب ، وبنقطة حـ على الحائط تعلو أ رأسيًا بمسافة ٦٠ سم. أوجد كلاً من الشد فى الخيط ورد فعل المفصل عند أ «٢٠ $\sqrt{2}$ ، ٢٠ $\sqrt{2}$ نيوتن»

٨ $\overline{أب}$ ساق منتظمة طولها ٨٠ سم ووزنها ٢٤ ثقل كجم والطرف أ مثبت فى مفصل مثبت فى حائط رأسى والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٨٠ $\sqrt{3}$ سم مثبت طرفه الآخر فى نقطة حـ على الحائط تقع رأسيًا فوق أ وعلى بُعد من أ يساوى ٨٠ سم فإذا اتزنت الساق فأوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل.

«١٢ $\sqrt{3}$ ، ١٢ ثقل كجم»

٩ كرة منتظمة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد البعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة. أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة يساوى ٦٠ نيوتن فى وضع الاتزان.

«$٢٠\sqrt{٣}$ ، $٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

١٠ كرة مركزها (م) وطول نصف قطرها ١٢ سم ووزنها (و) نيوتن تستند عند نقطة ب على حائط رأسى أملس ومربوطة من نقطة حـ على سطحها بخيط مثبت طرفه الآخر فى نقطة أ من الحائط تقع رأسيًا أعلى نقطة ب فإذا كان الشد فى الخيط مقداره ٥٠ نيوتن فأوجد طول الخيط ووزن الكرة عندما يكون رد فعل الحائط على الكرة يساوى ٢٥ نيوتن.

«١٢ سم ، $٢٥\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

١١ قضيب منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن علق من طرفيه بحبلين ثبت طرفاهما فى مسمار فى السقف فإذا كان الحبلان متعامدين وطول أحدهما ٤٨ سم فما مقدار الشد فى كل من الحبلين عندما يكون القضيب معلقًا تعليقًا مطلقًا وفى حالة توازن ؟

«٧,٢ ، ٩,٦ نيوتن»

---

١٢ $\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ٣٦ ثقل كجم يرتكز بأحد طرفيه (أ) على حائط رأسى أملس وبطرفه الآخر (ب) على أرض أفقية خشنة فإذا كان السلم فى وضع التوازن عندما يكون طرفه (أ) على بُعد ٣ أمتار من الأرض وطرفه (ب) على بُعد ٢,٥ متر من الحائط.أوجد رد فعل كل من الأرض والحائط على السلم.

«١٥ ، ٣٩ ثقل كجم»

---

١٣ $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٦ ثقل كجم يؤثر عند نقطة ء من القضيب حيث أء = ٢٠ سم ثبت القضيب فى مفصل عند أ والمفصل مثبت فى حائط رأسى وربط الطرف ب للقضيب بخيط خفيف مثبت نهايته فى نقطة حـ على الحائط تقع رأسيًا فوق أ وعلى بُعد ٨٠ سم من أ فاتزن القضيب بحيث كان عموديًا على الحائط. أوجد الشد فى الخيط ورد فعل المفصل.

«$٦\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤\sqrt{٧٣}}{٣}$ ثقل كجم»

---

١٤ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢ ل سم ووزنه ٨ ثقل كجم يؤثر فى منتصفه ويتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى وطرفه ب مربوط فى إحدى نهايتى خيط خفيف والنهاية الأخرى للخيط مثبتة فى نقطة حـ على الحائط وتقع رأسيًا أعلى أ فإذا كان أب = أحـ = ب حـ فى وضع الاتزان.

فأوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل عند أ

«٤ ، $٤\sqrt{٣}$ ثقل كجم»

---

١٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه (و) ثقل كجم. ثبت طرفه أ فى مفصل مثبت فى حائط رأسى والطرف ب مربوط بخيط طوله ٨٠ سم مثبت نهايته فى نقطة على الحائط رأسيًا فوق أ وعلى بُعد ١٠٠ سم منها فاتزن القضيب. أوجد الشد فى الخيط ، رد فعل المفصل وكذلك قياس زاوية ميل رد فعل المفصل على القضيب.

«$\frac{٢}{٥}$و ، $\frac{\sqrt{١٣}}{٥}$ و ثقل كجم ، ٤١َ ٣٣°»

١٦ قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ٩٠ سم ووزنه (و) ثقل كجم. ثبت طرفه (أ) فى حائط رأسى بواسطة مفصل وحفظ القضيب فى حالة توازن وهو فى وضع أفقى بواسطة خيط طوله ٥٠ سم ربط أحد طرفيه بنقطة (حـ) على القضيب تبعد عن أ بمقدار ٣٠ سم وثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة (ء) على الحائط تقع رأسيًا فوق أ احسب الشد فى الخيط ورد فعل المفصل على القضيب. «$\frac{١٥}{٨}$و ، $\frac{\sqrt{٩٧}}{٨}$ و ثقل كجم»

١٧ قضيب منتظم $\overline{أب}$ يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى. أثرت فى الطرف ب قوة أفقية فاتزن القضيب عندما كان يميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان وزن القضيب ٤ ث.كجم ويؤثر فى منتصفه أوجد مقدار القوة ورد فعل المفصل على القضيب. «٢ ، ٢$\sqrt{٥}$ ث.كجم»

١٨ ساق منتظمة قابلة للحركة حول أحد طرفيها شدت جانبًا بقوة أفقية تؤثر فى طرفها الآخر وتساوى نصف ثقل الساق. أوجد قياس زاوية ميل الساق على الرأسى عندما تتزن وكذلك رد الفعل عند الطرف الأول. «٤٥° ، $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ وزن الساق»

١٩ وضع قضيب منتظم وزنه ٤ نيوتن على مستويين أملسين متقابلين ويميلان على الأفقى بزاويتين قياساهما ٣٠° ، ٦٠° بحيث يقع القضيب وخطا أكبر ميل للمستويين فى مستوى رأسى واحد. أوجد مقدار الضغط على كل من المستويين وكذا قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى حالة التوازن. «٢$\sqrt{٣}$ ، ٢ نيوتن ، ٣٠°»

٢٠ كرة ملساء من الحديد وزنها (و) ثقل كجم مستقرة بين حائط رأسى أملس ، مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية هـ حيث جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ فإذا اتزنت الكرة فأوجد الضغط على كل من الحائط والمستوى المائل. «$\frac{٤}{٣}$و ، $\frac{٥}{٣}$و ثقل كجم»

٢١ قضيب منتظم وزنه ٢٠ ثقل كجم يستند بأحد طرفيه على مستوى رأسى أملس وبالطرف الآخر على مستوى مائل أملس يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠° أوجد فى وضع التوازن مقدار كل من ردى فعل المستويين وكذلك قياس زاوية ميل القضيب على الرأسى. «$\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٤٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.كجم ، ٦ ٤٩°»

٢٢ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٨ نيوتن يؤثر فى منتصفه وضع على مستويين أملسين مائلين على الأفقى ومتقابلين ومتعامدين بحيث يقع القضيب وخطا أكبر ميل للمستويين فى مستو رأسى واحد عمودى على خط تقاطع المستويين. فإذا كان مقدار الضغط على المستوى عند الطرف ب يساوى ٤ نيوتن. فأوجد فى وضع التوازن مقدار الضغط على المستوى الآخر وقياسى زاويتى ميل كل من المستويين على الأفقى. «٤$\sqrt{٣}$ نيوتن ، ٣٠° ، ٦٠°»

٢٣ كرة ملساء جوفاء طول نصف قطرها (نق) ووزنها ١٢$\sqrt{٣}$ ثقل كجم موضوعة على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° حفظت الكرة من الانزلاق على المستوى بواسطة ربطها بخيط من نقطة على سطحها وطول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة وثبتت نهاية الخيط فى نقطة على المستوى المائل. أثبت أنه فى وضع التوازن يكون هذا الخيط أفقيًا ثم أوجد مقدار الشد فى الخيط ، رد فعل السطح المائل على الكرة. «١٢ ، ٢٤ ثقل كجم»

٢٤ قضيب منتظم $\overline{أب}$ يمكنه الدوران بغير عائق فى مستوى رأسى حول مفصل فى أ ، ربط طرفه الآخر ب بخيط يمر على بكرة ملساء عند حـ أعلى أ تمامًا ويحمل ثقلًا يساوى نصف ثقل القضيب.
أوجد قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى حالة التوازن إذا علم أن أحـ = أب «٣٠°»

---

٢٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس ومحمول بواسطة خيط خفيف مربوط أحد طرفيه فى نقطة حـ من نقط القضيب حيث ب حـ = ١٠ سم ومربوط طرفه الآخر فى نقطة ء تقع على الحائط رأسيًا فوق أ إذا كان القضيب يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠° فى وضع التوازن فأوجد مقدار الشد فى الخيط ، رد فعل الحائط. «$٨\sqrt{٣}$ ، $٤\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٢٦ قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ٦ أمتار ووزنه ٨ ثقل كجم يتصل طرفه (أ) بحائط رأسى بواسطة مفصل ، حفظ القضيب فى وضع أفقى ، بربطه من إحدى نقطه (حـ) حيث أحـ = ٤ أمتار بأحد طرفى خيط ثم ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة (ء) على الحائط الرأسى فوق (أ) وعلى بُعد ٤ أمتار منها.
احسب مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل فى وضع الاتزان. «$٦\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{١٠}$ ثقل كجم»

مسائل تحل باستخدام التحليل

٢٧ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = $\frac{٣}{٥}$
وحفظ الجسم فى حالة الاتزان بواسطة قوة تميل على خط أكبر ميل بزاوية قياسها ى حيث جتا ى = $\frac{١٢}{١٣}$
أوجد ق ورد فعل المستوى. «٦٥ ، ٥٥ نيوتن»

---

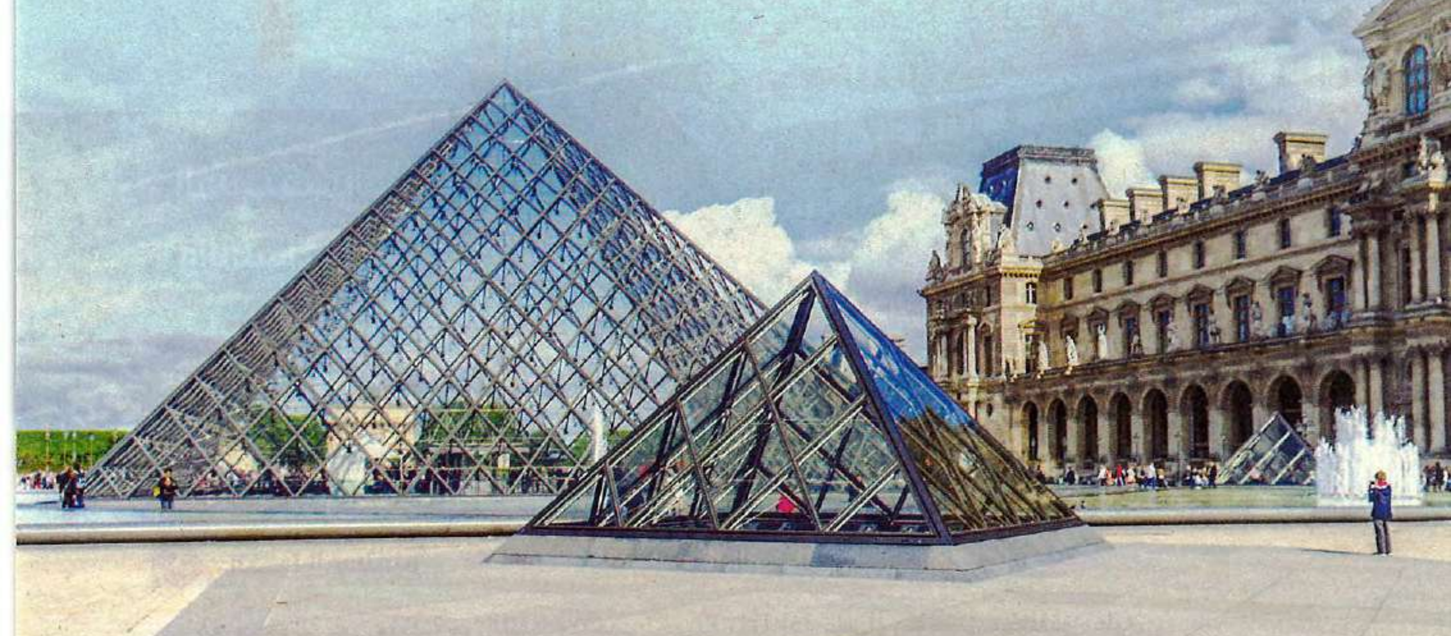
٢٨ وضع جسم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن على المستوى بواسطة قوتين إحداهما فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى ومقدارها ٥٠ نيوتن والثانية تميل على خط أكبر ميل إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° ومقدارها $٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن. أوجد كلًا من وزن الجسم ورد فعل المستوى. «١٦٠ ، $٧٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٢٩ حلقة ملساء يمر خلالها خيط خفيف طوله ٤٠ سم. مثبت طرفاه فى نقطتين أ ، ب على خط أفقى واحد البعد بينهما ٢٠ سم. أثرت على الحلقة قوة أفقية $\overline{ق}$ فاتزنت الحلقة رأسيًا أسفل ب وكان الخيط مشدودًا.
أوجد قيمة ق ومقدار قوة الشد فى الخيط علمًا بأن وزن الحلقة ٤٠٠ ثقل جم «٢٠٠ ، ٢٥٠ ث.جم»

الوحدة الثانية

الهندسة والقياس



الدرس 1	المستقيمات والمستويات فى الفـراغ.
الدرس 2	الهــــرم.
الدرس 3	المخــروط.
الدرس 4	الدائــــرة.



الدرس

1

المستقيمات والمستويات فى الفراغ

مفاهيم ومسلمات هندسية

١ الخـط المستقيم

هو مجموعة غير منتهية من النقط ويتحدد تحديدًا تامًا إذا علم أى نقطتين مختلفتين عليه.

فمثلًا : فى الشكل المقابل :

النقطتان أ ، ب يمر بهما مستقيم واحد وواحد فقط هو $\overleftrightarrow{أب}$ بينما النقطتان حـ ، ء يمر بهما مستقيم آخر $\overleftrightarrow{حـء}$

أى أن المستقيم يتعين بنقطتين مختلفتين عليه.

ملاحظة : $\overline{أب} \subset \overrightarrow{أب} \subset \overleftrightarrow{أب}$

٢ المستـوى

هو مجموعة غير منتهية من النقط تمثل سطحًا لا حدود له بحيث إن المستقيم المار بأى نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك السطح.

ويرمز للمستوى بأحد الحروف الكبيرة مثل س أو ص أو ...

كما يمكن أن نرمز له بثلاث نقط على الأقل تقع فى المستوى

بشرط أن تكون النقط ليست على استقامة واحدة مثل : أ ب حـ

أى أن المستوى يتعين بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

ملاحظتان

١ الأشكال الهندسية مثل المثلث والمربع والدائرة و ... هى مجموعات غير منتهية من النقط ومثل هذه الأشكال تسمى أشكالًا هندسية مستوية لأن كلًا منها مجموعة جزئية من مستواها.

٢ حيث إن المستوى ممتد من جميع جهاته بلا حدود لذلك سنكتفى عند تمثيله بتمثيل جزء منه بشكل هندسى مستوى مثل المربع أو الدائرة أو متوازى الأضلاع .. وهكذا.

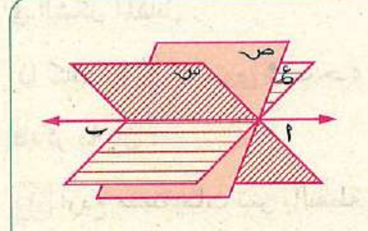
٣ الفـــراغ (الفضاء)



هو مجموعة غير منتهية من النقط وهو الذى يحتوى جميع المستقيمات والمستويات والمجسمات محل الدراسة.

فالمجسمات مثل الكرة والأسطوانة والمكعب ، ... هى مجموعات غير منتهية من النقط ولكنها ليست محتواة فى مستوى واحد ولكن محتواة فى الفراغ الكبير المحيط بنا وسطوح هذه المجسمات تتكون من عدة أجزاء مستوية كما فى المكعب أو غير مستوية كما فى الكرة.

ملاحظـــات



١ أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستقيمات.

٢ أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات.

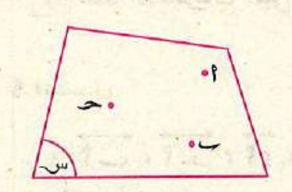
٣ أى نقطتين فى الفراغ يمر بها مستقيم واحد فقط.

٤ أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما عدد لا نهائى من المستويات.

تعيين المستوى فى الفراغ

يتحدد المستوى تحديدًا تامًا فى الفراغ بإحدى الحالات الآتية :

١ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة



ففى الشكل المقابل :

النقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة

لذلك يتعين المستوى س أو أ ب حـ

ومن ذلك يمكن استنتاج أن :

أى ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ يمر بها مستوى واحد فقط.

٢ مستقيم ونقطة لا تنتمى إليه

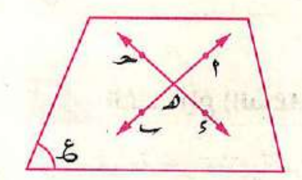


فى الشكل المقابل :

أ ∉ $\overleftrightarrow{بحـ}$ ولذلك النقطة أ

والمستقيم $\overleftrightarrow{بحـ}$ يعينان المستوى ص أو أ ب حـ

٣ مستقيمان متقاطعان

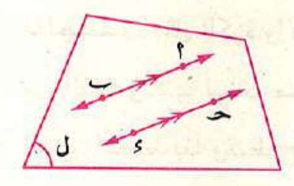


فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب}$ ∩ $\overleftrightarrow{حـء}$ = {هـ}

لذلك $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـء}$ يعينان المستوى ع

٤ مستقيمان متوازيان غير منطبقين

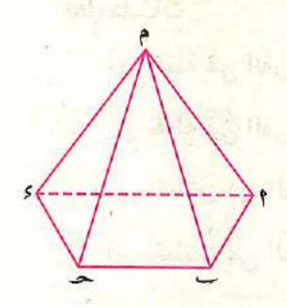


فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـء}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ $\overleftrightarrow{حـء}$ = ∅

لذلك $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـء}$ يعينان المستوى ل

مثال ١



فى الشكل المقابل :

إذا كانت م ∉ المستوى أ ب حـ ء

فاذكر ما يأتى :

١ أربع مستقيمات تمر بالنقطة أ

٢ ثلاث مستويات تمر بالنقطة أ

٣ المستقيمات التى تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

٤ مستويين كل منهما يمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

٥ أربع مستويات تمر بالنقطة م

٦ عدد المستويات التى تحدد سطح المجسم فى الشكل.

الحل

١ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$ ، $\overleftrightarrow{أم}$

٢ أ ب حـ ء ، أ ب م ، أ ء م

٣ $\overleftrightarrow{أب}$

٤ أ ب حـ ء ، أ ب م

٥ م أ ب ، م ب حـ ، م حـ ء ، م أ ء

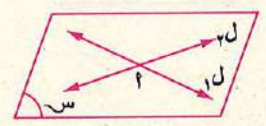
٦ خمسة مستويات.

الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات فى الفراغ

١ الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين فى الفراغ

المستقيمان المتقاطعان

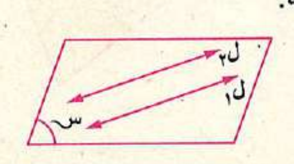
هما مستقيمان يقعان فى نفس المستوى ويشتركان فى نقطة واحدة.



- ل$_1$ ، ل$_2$ متقاطعان
- ل$_1$ $\cap$ ل$_2$ = {أ}
- يجمعهما مستوٍ واحد.

المستقيمان المتوازيان

هما مستقيمان يقعان فى نفس المستوى ولا يشتركان فى أى نقطة.



- ل$_1$ // ل$_2$
- ل$_1$ $\cap$ ل$_2$ = $\varnothing$
- يجمعهما مستوٍ واحد.

المستقيمان المتخالفان

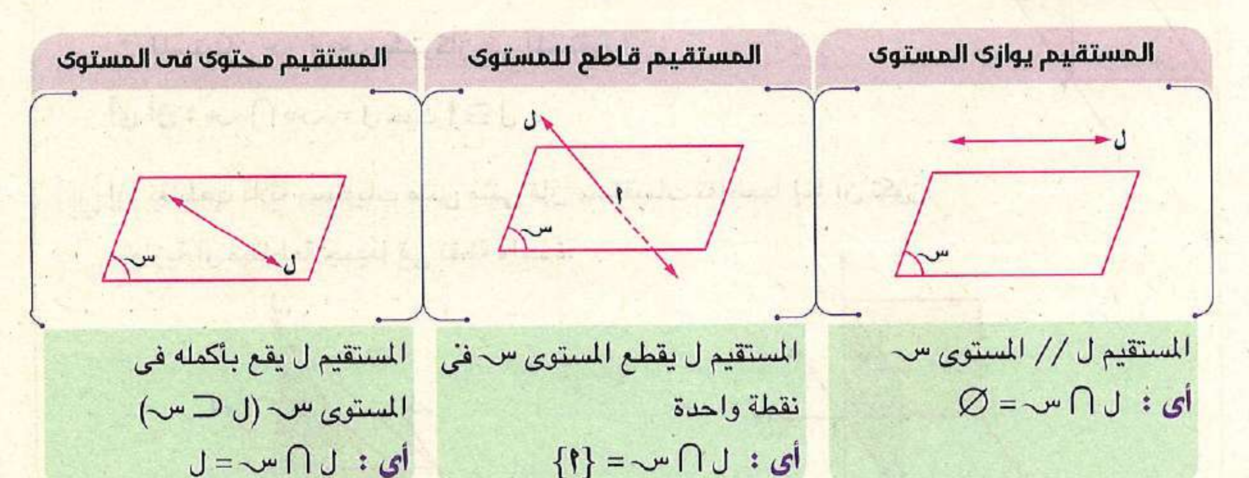
هما مستقيمان لا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد.

- ل$_1$ ، ل$_2$ متخالفان
- ل$_1$ $\cap$ ل$_2$ = $\varnothing$
- لا يجمعهما مستوٍ واحد.

لاحظ أن

المستقيمان المتخالفان غير متوازيين وغير متقاطعين لأنه لا يجمعهما مستوى واحد.

٢ الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو فى الفراغ



المستقيم يوازى المستوى

المستقيم ل // المستوى س
أى : ل $\cap$ س = $\varnothing$

المستقيم قاطع للمستوى

المستقيم ل يقطع المستوى س فى نقطة واحدة
أى : ل $\cap$ س = {أ}

المستقيم محتوى فى المستوى

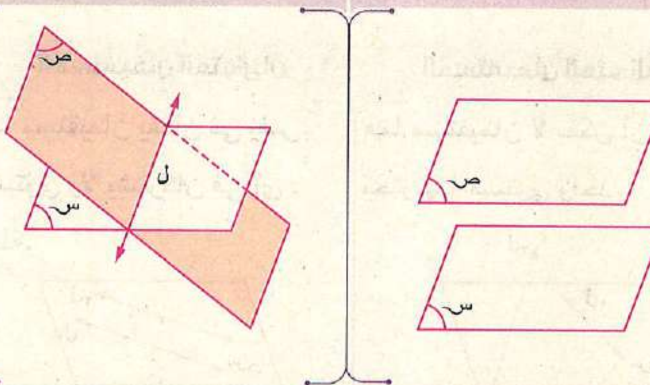
المستقيم ل يقع بأكمله فى المستوى س (ل $\subset$ س)
أى : ل $\cap$ س = ل

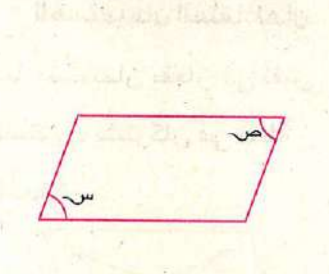
لاحظ أنه

إذا اشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة واحدة فإن المستقيم يقع بتمامه داخل المستوى.

٣ الأوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ



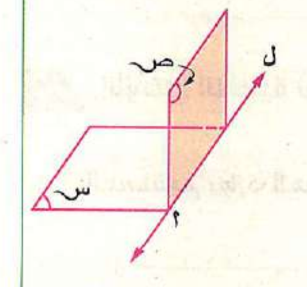




المستويان المتوازيان	المستويان المتقاطعان	المستويان المنطبقان
المستوى س // المستوى ص **أى :** س ∩ ص = ∅	المستويان س ، ص متقاطعان فى خط مستقيم ل **أى :** س ∩ ص = ل	المستويان س ، ص يشتركان فى جميع النقط (منطبقان) **أى :** س ∩ ص = س = ص

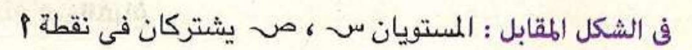
ملاحظـــات

١ إذا اشترك مستويان مختلفان فى نقطة فإنهما يشتركان فى مستقيم يمر بهذه النقطة.



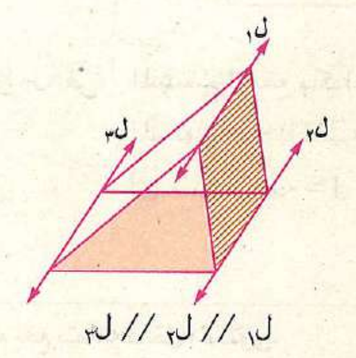
فى الشكل المقابل : المستويان س ، ص يشتركان فى نقطة أ

∴ المستويان س ، ص يشتركان فى المستقيم ل

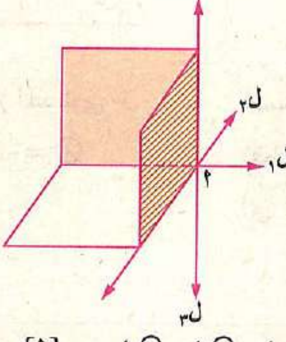


أى أن : س ∩ ص = ل حيث أ ∈ ل

٢ إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تكون متوازية أو متقاطعة جميعًا فى نقطة واحدة.



$ل_{1} \parallel ل_{2} \parallel ل_{3}$



$ل_{1} \cap ل_{2} \cap ل_{3} = \{أ\}$

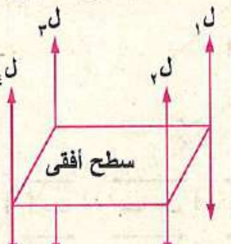
٣ المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان

أى أن : لأى ثلاثة مستقيمات $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ فى الفراغ

إذا كان : $ل_1 \; // \; ل_3$ ، $ل_2 \; // \; ل_3$

فإن : $ل_1 \; // \; ل_2$

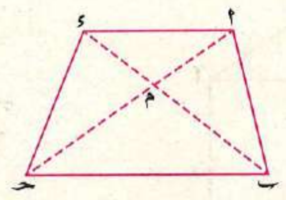
٤ المستقيمات الرأسية فى الفراغ كلها متوازية ولكن ليس بالضرورة أن تكون المستقيمات الأفقية كلها متوازية.



المستقيمات الرأسية $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ ، $ل_4$ كلها متوازية.

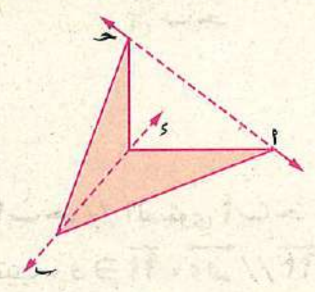
المستقيمات الأفقية $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ ، ... ليس بالضرورة متوازية.

٥ إذا تقاطع المستقيمان الحاملان لقطرى الشكل الرباعى فى نقطة فإن أضلاعه تقع جميعًا فى مستوى واحد.



الشكل الرباعى أ ب حـ ء أضلاعه تقع فى مستوى واحد

لأن : $\overleftrightarrow{أحـ} \cap \overleftrightarrow{بء} = \{م\}$



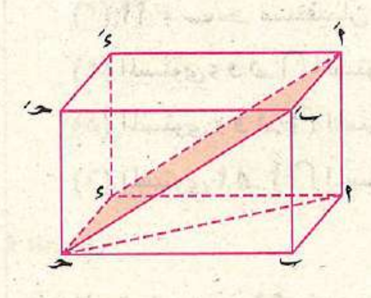
الشكل الرباعى أ ب حـ ء أضلاعه لا تقع جميعًا فى مستوى واحد

لأن : $\overleftrightarrow{أحـ} \cap \overleftrightarrow{بء} = \emptyset$ ($\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{بء}$ متخالفان)

مثال ٢

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ متوازى مستطيلات **أكمل ما يأتى :**



١ $\overleftrightarrow{بحـ}$ // المستوى ....

٢ $\overleftrightarrow{أب}$ ، .... مستقيمان متخالفان.

٣ المستوى أ ب بَ أَ // المستوى ....

٤ المستوى أ ب بَ أَ $\cap$ المستوى أَ بَ حـَ ءَ = ...

٥ المستوى أ ب حـ $\cap$ المستوى أَ بَ حـ ء = ...

٦ المستوى أ أَ ءَ ء $\cap$ المستوى أ ب بَ أَ $\cap$ المستوى أ ب حـ ء = ...

الحل

[١] ﺃ ﺃَ ﺀ ﺀ أو ﺃَ ﺏَ ﺣَ ﺀ َ — [٢] ﺀﺀَ أو ﺃﺀَ (استنتج إجابات أخرى). — [٣] ﺀ ﺣـ ﺣَ ﺀ َ

[٤] $\overleftrightarrow{\text{ﺃﺏ}}$ — [٥] $\overleftrightarrow{\text{ﺀﺣـ}}$ — [٦] {ﺃ}

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

المستوى س ∩ المستوى ص = المستقيم ل

، ﺃ ∈ س ، ﺣـ ∈ ص ، ﺏ ∈ ل

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] المستوى ﺃ ﺏ ﺣـ ∩ المستوى س = ... ($\overleftrightarrow{\text{ﺃﺏ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺏﺣـ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺣـﺃ}}$ أ، {ﺏ})

[٢] المستوى ﺃ ﺏ ﺣـ ∩ المستوى ص = ... ($\overleftrightarrow{\text{ﺃﺏ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺏﺣـ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺣـﺃ}}$ أ، {ﺏ})

[٣] المستوى ﺃ ﺏ ﺣـ ∩ المستوى س ∩ المستوى ص = ... ($\overleftrightarrow{\text{ﺃﺏ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺏﺣـ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺣـﺃ}}$ أ، {ﺏ})

الحل

[١] $\overleftrightarrow{\text{ﺃﺏ}}$ — [٢] $\overleftrightarrow{\text{ﺏﺣـ}}$ — [٣] {ﺏ}

مثال ٤

فى الشكل المقابل :

إذا كان المستوى ﺃ ﺏ ﺣـ // المستوى ﺃَ ﺏَ ﺣَ ، ﺀ ، ﻫ منتصفى $\overline{\text{ﺏَﺣَ}}$ ، $\overline{\text{ﺏﺣـ}}$ على الترتيب ، و ∈ $\overline{\text{ﺃﺃَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ﺀﻫ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ﺃﺃَ}}$

[١] **اذكر أربعة مستويات تمر بالنقطة ﺃ**

[٢] **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) ﺃ .... المستوى ﺀ و ﻫ (∈ أ، ∌ أ، ⊂ أ، ⊄)

(٢) $\overleftrightarrow{\text{ﺃﺃَ}}$ .... المستوى ﺀ و ﻫ (∈ أ، ∌ أ، ⊂ أ، ⊄)

(٣) $\overleftrightarrow{\text{ﺃﺃَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ﺏﺣـ}}$ مستقيمان .... (متوازيان أ، متخالفان أ، متقاطعان أ، متعامدان)

(٤) المستوى ﺀ و ﻫ ∩ المستوى ﺃَ ﺏَ ﺣَ = ... ($\overleftrightarrow{\text{ﺃَﺀ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺃﻫ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺀﻫ}}$ أ، و ﻫ)

(٥) المستوى ﺀ و ﻫ ∩ المستوى ﺃ ﺏ ﺏَ ﺃَ = ... ($\overleftrightarrow{\text{ﺃﺃَ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺃﻫ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺃَﺀ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺀﻫ}}$)

(٦) المستوى ﺃ ﻫ ﺃَ ∩ المستوى ﺏَ ﺏ ﺣـ ﺣَ = ... ($\overleftrightarrow{\text{ﺀﻫ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺃﻫ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺃَﺀ}}$ أ، $\overleftrightarrow{\text{ﺃﺃَ}}$)

الحل

[١] المستويات هى : ﺃ ﺃَ ﺏَ ﺏ ، ﺃ ﺃَ ﺣَ ﺣـ ، ﺃ ﺃَ ﻫ ، ﺃ ﺏ ﺣـ

[٢] (١) ∈ — (٢) ⊂ — (٣) متخالفان.

(٤) $\overleftrightarrow{\text{ﺃَﺀ}}$ — (٥) $\overleftrightarrow{\text{ﺃﺃَ}}$ — (٦) $\overleftrightarrow{\text{ﺀﻫ}}$

تمارين 6 على المستقيمات والمستويات فى الفراغ



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد المستقيمات التى تمر بنقطة معلومة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٢) عدد المستقيمات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٣) عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٤) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٥) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٦) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيم ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين وغير منطبقين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

(٧) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيمين متقاطعين. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيم ونقطة تنتمى إليه. (د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

(٨) عدد المستويات التى تمر بمستقيمين متوازيين مختلفين = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٩) المستقيمان المتخالفان هما المستقيمان اللذان ....

(أ) لا يتقاطعان. (ب) لا يتعامدان.

(جـ) لا يتوازيان. (د) لا يتقاطعان ولا يتوازيان.

(١٠) يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

(١١) إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) $\varnothing$　(ب) ل　(جـ) س　(د) {أ}

(١٢) إذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) $\varnothing$　(ب) ل　(جـ) س　(د) {أ}

(١٣) إذا كان المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ متخالفين فإن : $ل_١$ ∩ $ل_٢$ = ...

(أ) $\varnothing$　(ب) $ل_١$

(جـ) $ل_٢$　(د) المستوى الذى يجمع $ل_١$ ، $ل_٢$

(١٤) المستويان غير المتوازيين يتقاطعان فى ....

(أ) نقطة.　(ب) خط مستقيم.　(جـ) مستوى.　(د) شعاع.

(١٥) إذا كان : س ، ص مستويين بحيث س ∩ ص = $\varnothing$ فإن : س .... ص

(أ) ⊥　(ب) //　(جـ) =　(د) ⊃

(١٦) ينطبق المستويان إذا اشتركا فى ....

(أ) نقطة واحدة.　(ب) نقطتين.

(جـ) ثلاث نقاط على استقامة واحدة.　(د) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

(١٧) إذا اشترك المستقيم والمستوى فى نقطتين فإن المستقيم ....

(أ) يوازى المستوى.　(ب) يقطع المستوى فى نقطة وحيدة.

(جـ) يقع بأكمله داخل المستوى.　(د) يقطع المستوى فى نقطتين فقط.

(١٨) إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن : ....

(أ) أ ب = ب حـ = أ حـ　(ب) أ ب + ب حـ = أ حـ

(جـ) أ ب + ب حـ > أ حـ　(د) أ ب + ب حـ < أ حـ

(١٩) المستقيمات الرأسية المختلفة فى الفراغ تكون ....

(أ) متوازية.　(ب) متخالفة.

(جـ) يجمعها مستوٍ واحد.　(د) متقاطعة.

(٢٠) الأوضاع النسبية لزوج من المستقيمات فى المستوى الواحد هى كل ما يلى ما عدا ....

(أ) متوازيان.　(ب) متقاطعان.　(جـ) متخالفان.　(د) منطبقان.

(٢١) إذا كانت : س ، ص ، ع مستويات فى الفراغ بحيث : س ∩ ص ∩ ع = {أ}

، س ∩ ص = المستقيم ل. أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أ ∈ ل　(ب) ل ∩ ع = {أ}　(جـ) ل // ع　(د) أ ∈ ع

(٢٢) إذا كانت م نقطة لا تنتمى للمستوى الذى يضم النقط أ ، ب ، حـ فإن : $\overleftrightarrow{\text{أم}}$ ....

(أ) يقع بأكمله داخل المستوى. (ب) يقطع المستوى فى نقطة.

(جـ) يقطع المستوى فى نقطتين. (د) يوازى المستوى.

(٢٣) إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊂ المستوى س ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ // المستوى س فإن : $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ....

(أ) متوازيان فقط. (ب) متخالفان فقط.

(جـ) متوازيان أو متخالفان. (د) متقاطعان.

(٢٤) س ، ص مستويان متوازيان وكان المستقيم $ل_1$ ⊂ س ، المستقيم $ل_2$ ⊂ ص فأى مما يأتى لا يمكن حدوثه ؟

(أ) $ل_1$ // $ل_2$ (ب) $ل_1$ ، $ل_2$ متخالفان.

(جـ) $ل_1$ // ص ، $ل_2$ // س (د) $ل_1$ ، $ل_2$ متقاطعين.

(٢٥) أقل عدد من المستويات التى يمكن أن تحدد سطح مجسم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٦) أ ب حـ ء أَ بَ حَ ءَ متوازى مستطيلات كم مستقيم يحمل حرفًا من أحرف الشكل يكون مخالفًا للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ؟

(أ) لا يوجد. (ب) واحد. (جـ) اثنان. (د) أربعة.

(٢٧) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستوى واحد فقط.

(ب) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ تعين مستوى.

(جـ) رؤوس المثلث تعين مستوى.

(د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد فقط.

(٢٨) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستويًا.

(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان فى نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

(٢٩) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟ حيث $ل_1$ ، $ل_2$ مستقيمان ، س ، ص مستويان.

(أ) إذا كان : $ل_1 \cap ل_2 = \varnothing$ فإن : $ل_1$ // $ل_2$ أو $ل_1$ ، $ل_2$ متخالفان.

(ب) إذا كان : $ل_1 \cap س = \varnothing$ فإن : $ل_1$ // س

(جـ) إذا كان : $ل_2 \cap س = ل_2$ فإن : $ل_2 \subset س$

(د) إذا كان : $ل_2 \subset ص$ فإن : $ل_2 \cap ص = \varnothing$

(٣٠) **باستخدام الشكل المقابل :**

أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) ل ⊂ س　　(ب) أ ∈ ل ، أ ∉ س

(جـ) حـ ∈ س ، حـ ∉ ل　　(د) $\overline{أحـ}$ ∩ ل = {أ}

(٣١) **فى الشكل المقابل :**

المستوى أ ب ء ∩ المستوى م حـ ء = ...

(أ) $\overleftrightarrow{أم}$

(ب) $\overleftrightarrow{حـ ء}$

(جـ) {ء}

(د) $\overleftrightarrow{م حـ}$

(٣٢) **فى الشكل المقابل :**

المستوى أ أَ بَ ∩ المستوى أَ حـ حـَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{أأَ}$　　(ب) $\overleftrightarrow{ب بَ}$

(جـ) $\overleftrightarrow{حـ حـَ}$　　(د) $\overleftrightarrow{أَ حـ}$

(٣٣) **فى الشكل المقابل :**

المستوى س ∩ المستوى ص = ...

(أ) {ب}

(ب) {أ ، ب ، حـ}

(جـ) المستقيم ل

(د) ∅

(٣٤) **فى الشكل المقابل :**

أولًا : ل .... س

(أ) ∈　　(ب) ∉

(جـ) ⊂　　(د) ⊄

ثانيًا : أ .... س

(أ) ∈　　(ب) ∉　　(جـ) ⊂　　(د) ⊄

ثالثًا : حـ .... ص

(أ) ∈　　(ب) ∉　　(جـ) ⊂　　(د) ⊄

رابعًا : $\overleftrightarrow{ب حـ}$ .... ص

(أ) ∈　　(ب) ∉　　(جـ) ⊂　　(د) ⊄

(٣٥) في الشكل المقابل :

أولًا : المستوى أ ب بَ أَ ∩ المستوى ب حـ حـَ بَ = ...

(أ) ب بَ (ب) ∅

(جـ) {بَ} (د) أ حـ

ثانيًا : المستوى أ ب حـ ∩ المستوى أَ بَ حـَ = ...

(أ) ب بَ (ب) ∅ (جـ) أ أَ (د) أ ب

ثالثًا : أ حـ ∩ أَ حـَ = ...

(أ) {أ} (ب) {حـَ} (جـ) أ أَ ∩ ب بَ (د) أ حـ

رابعًا : ب بَ ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) ب بَ (ب) {بَ} (جـ) {ب} (د) ∅

(٣٦) في الشكل المقابل :

أولًا : المستوى م أ ب ∩ المستوى م ب حـ = ...

(أ) أ ب (ب) م ب

(جـ) ∅ (د) {م}

ثانيًا : المستوى م ب حـ ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) {ب} (ب) ∅ (جـ) أ ب (د) ب حـ

ثالثًا : م ب ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) م ب (ب) ∅ (جـ) {ب} (د) {م}

رابعًا : المستوى م أ ب ∩ المستوى م ب حـ ∩ المستوى م أ حـ = ...

(أ) م ب (ب) م حـ (جـ) المجسم م أ ب حـ (د) {م}

(٣٧) في الشكل الموضح أ ∉ المستوى ب حـ ء :

أولًا : س ∩ ص = ...

(أ) أ حـ (ب) ∅

(جـ) {أ} (د) {حـ}

ثانيًا : س ∩ ع = ...

(أ) ∅ (ب) ب حـ (جـ) أ حـ (د) {حـ}

ثالثًا : ص ∩ ع = ...

(أ) {حـ}　(ب) $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$　(جـ) $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$　(د) ∅

رابعًا : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ س = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$　(ب) ∅　(جـ) $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$　(د) {ب}

خامسًا : بفرض أن : ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠°　،　ب حـ = ٣ سم　،　حـ ء = ٤ سم

فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٦　(ب) ٥　(جـ) ٤　(د) ٧

(٣٨) في الشكل المقابل :

س ، ص مستويان متقاطعان في المستقيم ل ، أ ∈ ل

، ب ∈ س ، ب ∉ ص ، حـ ∈ ص ، حـ ∉ س

أولًا : المستوى س ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$　(ب) $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$　(جـ) $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$　(د) المستقيم ل

ثانيًا : المستوى ص ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$　(ب) {أ}　(جـ) $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$　(د) $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$

ثالثًا : المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) ∅　(ب) المستقيم ل　(جـ) {أ}　(د) {ب}

(٣٩) في الشكل المقابل :

أولًا : المستوى أ ب حـ ء // المستوى ....

(أ) أ َ ب َ حـ َ　(ب) أ َ ب َ ء َ

(جـ) أ ب ب َ　(د) أ َ ب َ حـ

ثانيًا : المستوى ب حـ حـ َ ب َ // المستوى ....

(أ) أ ب حـ　(ب) أ َ ب َ حـ َ　(جـ) أ ب ء　(د) أ أ َ ء

ثالثًا : المستوى أ ب ب َ أ َ ∩ المستوى أ ب حـ ء = ...

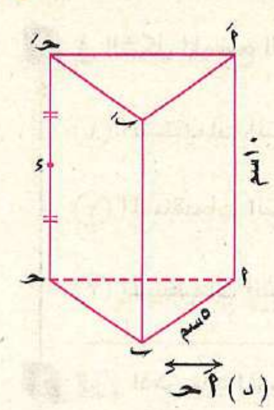
(أ) {ب}　(ب) {أ ، ب}　(جـ) $\overline{\text{أ ب}}$　(د) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

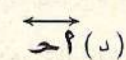
رابعًا : المستوى أ ب ب َ أ َ ∩ المستوى ء حـ حـ َ ء َ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{ب َ حـ َ}}$　(ب) $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$　(جـ) ∅　(د) {حـ}

خامسًا : المستوى ء حـ حـ َ ء َ ∩ المستوى أ ب حـ ء ∩ المستوى أ ء ء َ أ َ = ...

(أ) ∅　(ب) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$　(جـ) {حـ}　(د) {ء}





(٤٠) فى الشكل المقابل :

أ ب بَ أَ ، ب بَ حَ حـ

، أ حـ حَ أَ ثلاثة مستطيلات متقاطعة مثنى مثنى ومتطابقة

، ء منتصف $\overline{حـ حَ}$ فإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ أَ = ١٠ سم

أولًا : المستوى أ ء أَ ∩ المستوى ب ء بَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{حـ حَ}$ (ب) $\overleftrightarrow{ب بَ}$ (جـ) {ء} (د) $\overleftrightarrow{أ حـ}$

ثانيًا : المستوى أ ء ب ∩ المستوى أ ب حـ = ...

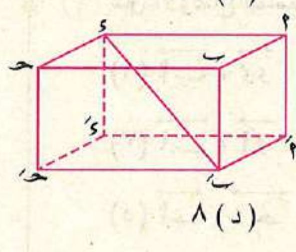
(أ) ∅ (ب) $\overleftrightarrow{أ ب}$ (جـ) {ب} (د) $\overleftrightarrow{أ حـ}$

ثالثًا : المستوى أ ء ب ∩ المستوى ب حـ حَ بَ = ...

(أ) {ب} (ب) $\overleftrightarrow{ب حـ}$ (جـ) $\overleftrightarrow{ب ء}$ (د) ∅

رابعًا : ق (∠ ب ء بَ) = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

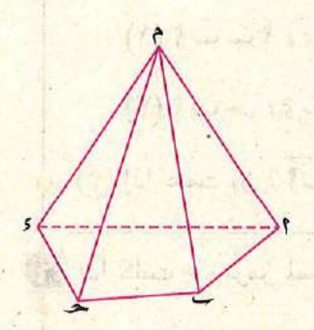


(٤١) أ ب حـ ء أَ بَ حَ ءَ متوازى مستطيلات.

كم مستقيم يحمل حرفًا من أحرف الشكل يكون مخالفًا للمستقيم $\overleftrightarrow{ء بَ}$ ؟

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

ثانيًا الأسئلة المقالية



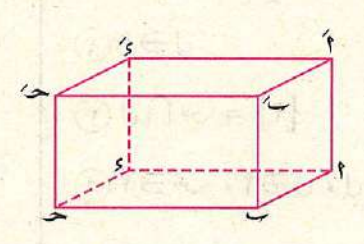
١ تأمل الشكل المقابل ، ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) كم عدد المستقيمات التى تحمل أحرف بالشكل ؟

(٢) اذكر المستقيمات التى تحمل أحرف وتمر بنقطة م

(٣) كم عدد المستويات التى تحمل أوجه بالشكل ؟

(٤) اذكر ثلاثة مستويات تمر بالنقطة م



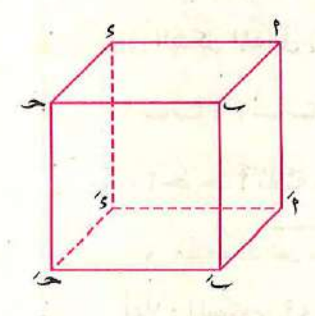
٢ تأمل الشكل المقابل ، ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) اكتب ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة أ

(٢) اكتب المستقيمات التى تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

(٣) اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ

(٤) اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.



٣ في الشكل الموضح الذى يمثل حجرة الدراسة أوجد :

(١) المستقيمات التى تحمل أحرف وكل منها يتقاطع مع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

(٢) المستقيمات التى تحمل أحرف وتوازى $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

(٣) المستقيمات التى تحمل أحرف وكل منها يكون متخالفًا مع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

---

٤ اذكر عدد المستويات التى تمر بكل من :

(١) نقطة واحدة معلومة.

(٢) نقطتين مختلفتين.

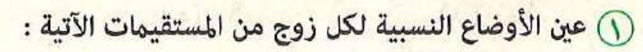
(٣) ثلاث نقط على استقامة واحدة.

(٤) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

---

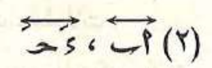
٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أ َ ب َ حـ َ ء َ مكعب طول حرفه ٦ سم



(١) عين الأوضاع النسبية لكل زوج من المستقيمات الآتية :

(١) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ءء َ}}$

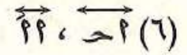


(٢) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ءحـ َ}}$

(٣) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أء َ}}$

(٤) $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أحـ َ}}$

(٥) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ءحـ َ}}$



(٦) $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أأ َ}}$

(٢) عين الأوضاع النسبية لكل زوج من المستويات الآتية :

(١) أ ب ب َ أ َ ، ء حـ حـ َ ء َ

(٢) أ َ ب َ ب أ ، أ َ ب َ حـ َ ء َ

(٣) أ ب حـ ، ء َ ب َ ء

(٣) إذا علمت أن : $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{أء َ}}$ فأوجد طول $\overline{\text{ب ء َ}}$

---

٦ إذا كانت س ترمز لمستوى ، ل ترمز لمستقيم ، أ ترمز لنقطة

فارسم الأشكال التى تمثل الحالات الآتية (كل على حدة) :

(١) أ ∈ ل

(٢) ل ⊂ س

(٣) ل ∩ س = {أ}

(٤) ل // س

(٥) أ ∈ س ، أ ∉ ل ، ل ⊂ س

الدرس

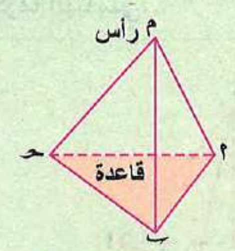
2

الهـــــرم

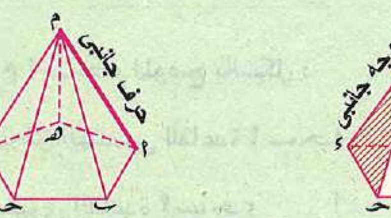


تعريف الهرم

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل مضلع وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة ويسمى الهرم ثلاثيًا أو رباعيًا أو خماسيًا أو .... وفقًا لعدد أضلاع قاعدته.



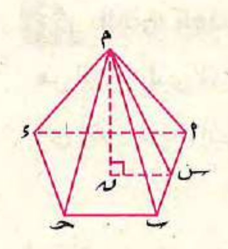
هرم ثلاثى قاعدته على شكل مثلث



هرم رباعى قاعدته على شكل مضلع رباعى

هرم خماسى قاعدته على شكل مضلع خماسى

بالاستعانة بالشكل المقابل يمكن توضيح بعض المفاهيم الخاصة بالهرم :



- م أ ب حـ ء هرم رباعى أوجهه الجانبية سطوح المثلثات م أ ب ، م ب حـ ، م حـ ء ، م أ ء وقاعدته سطح المضلع أ ب حـ ء
- **الأوجه الجانبية للهرم** : هى دائمًا سطوح مثلثات بينما القاعدة قد تكون سطح مثلث أو مضلع رباعى أو خماسى أو ...
- **رأس الهرم** : هى النقطة المشتركة بين جميع أوجهه الجانبية وتمثلها نقطة م بالشكل.
- **الحرف الجانبى للهرم** : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الهرم وأى رأس من رؤوس قاعدته. (مثل $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ ، $\overline{محـ}$ ، $\overline{مء}$ بالشكل)
- **ارتفاع الهرم** : هو بُعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته أى أنه طول العمود الساقط من رأسه على مستوى قاعدته. (م ن هو ارتفاع الهرم بالشكل)

• **الارتفاع الجانبى للهرم** : هو بُعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته أى أنه طول العمود الساقط من رأس الهرم على ضلع من أضلاع قاعدة الهرم.

(م س هو ارتفاع جانبى للهرم م ا ب حـ ء حيث : $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ا ب}}$)

ملاحظـات

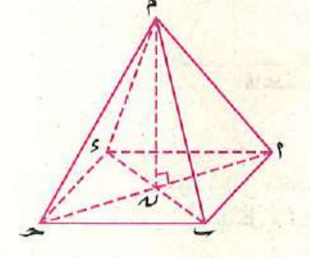
- المستقيم العمودى على مستوى يكون عموديًا على أى مستقيم فى هذا المستوى ومنها فإن المستقيم العمودى على قاعدة الهرم يكون عموديًا على أى مستقيم فيها.
- المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متساوية فى الطول وزواياه متساوية فى القياس.
- المركز الهندسى لمضلع منتظم هو مركز الدائرة الداخلة أو الخارجة له.
- المركز الهندسى لمتوازى الأضلاع وحالاته الخاصة هو نقطة تقاطع القطرين.
- المركز الهندسى للمثلث هو نقطة تقاطع متوسطاته.

حالات خاصة من الهرم

١ الهرم القائم

يكون الهرم قائمًا إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسى.

فمثلًا : فى الهرم م ا ب حـ ء الموضح بالشكل :



إذا كانت ن هى المركز الهندسى للقاعدة ا ب حـ ء

وكان : $\overline{\text{م ن}} \perp$ مستوى القاعدة ا ب حـ ء

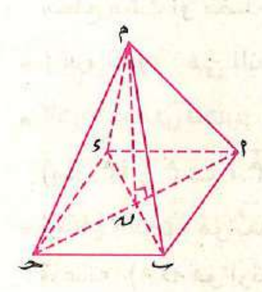
فإن : الهرم م ا ب حـ ء يسمى هرمًا قائمًا.

٢ الهرم المنتظم

هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه هو موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها.

أى أنه هرم قائم قاعدته مضلع منتظم.

فمثلًا : فى الهرم م ا ب حـ ء الموضح بالشكل :



إذا كانت ن هى المركز الهندسى لقاعدته المنتظمة ا ب حـ ء «على شكل مربع».

وكان : $\overline{\text{م ن}} \perp$ مستوى القاعدة.

فإن : الهرم م ا ب حـ ء يسمى هرمًا منتظمًا.

* خواص الهرم المنتظم :

1. أحرفه الجانبية متساوية الطول.
2. ارتفاعاته الجانبية متساوية الطول.
3. أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متطابقة متساوية الساقين.

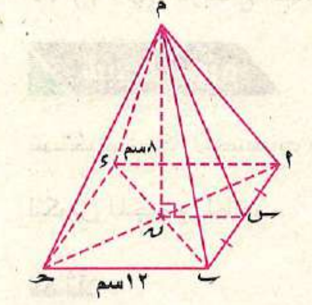
ملاحظـات

- كل هرم منتظم هو هرم قائم ولكن ليس كل هرم قائم يكون هرمًا منتظمًا.
- ليس بالضرورة أن تكون الأحرف الجانبية للهرم القائم متساوية الطول.
- ليس بالضرورة أن تكون الارتفاعات الجانبية للهرم القائم متساوية الطول.
- يسمى الهرم الثلاثى المنتظم هرمًا ثلاثيًا منتظم الوجوه إذا كانت جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع ويكون أى منها قاعدة له.

مثال (1)

م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم أوجد ارتفاعه الجانبى.

الحـل



بفرض أن : س منتصف $\overline{أب}$

، ∵ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم

∴ م أ = م ب ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$

∴ م س الارتفاع الجانبى للهرم.

، ∵ فى Δ أ ب حـ : س منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أحـ}$

∴ س ن = $\frac{1}{2}$ ب حـ ∴ س ن = ٦ سم

، ∵ $\overline{من} \perp$ المستوى أ ب حـ ء ∴ $\overline{من} \perp \overline{سن}$

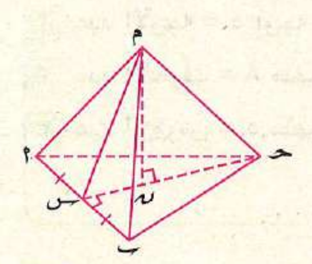
∴ Δ م س ن قائم الزاوية فى ن ∴ $(س م)^2 = (س ن)^2 + (م ن)^2$

∴ $(س م)^2 = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠$ ∴ س م = ١٠ سم

مثال (2)

م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته Δ أ ب حـ طول ضلع قاعدته ٦ سم ، وارتفاعه ٤ سم أوجد طول حرفه وارتفاعه الجانبى.

الحـل



بفرض أن : س منتصف $\overline{أب}$

∵ م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم

∴ أ ب حـ متساوى الأضلاع

، ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{حـس} \perp \overline{أب}$

∴ Δ ب س حـ قائم الزاوية فى س

∴ (س حـ)^2 = (ب حـ)^2 - (ب س)^2 = ٣٦ - ٩ = ٢٧

∴ س حـ = $\sqrt{٢٧}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم ، ∵ ن مركز المثلث أ ب حـ

∴ ن نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ ∴ ن س : ن حـ = ١ : ٢

∴ ن س = $\sqrt{٣}$ سم ، ن حـ = ٢ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ م ن ⊥ المستوى أ ب حـ ∴ $\overline{م ن}$ ⊥ $\overline{س حـ}$

∴ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن ∴ (م حـ)^2 = (م ن)^2 + (ن حـ)^2 = ١٦ + ١٢ = ٢٨

∴ م حـ = $\sqrt{٢٨}$ = ٢ $\sqrt{٧}$ سم ∴ طول حرف الهرم = ٢ $\sqrt{٧}$ سم

، ∵ Δ م ن س قائم الزاوية فى ن

∴ (م س)^2 = (م ن)^2 + (ن س)^2 = ١٦ + ٣ = ١٩

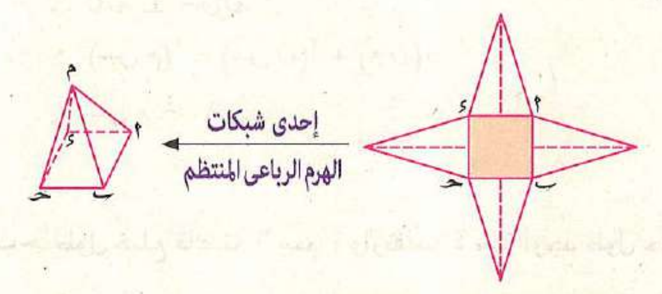
∴ م س = $\sqrt{١٩}$ سم ، ∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ (م س) الارتفاع الجانبى للهرم = $\sqrt{١٩}$ سم

شبكة الهرم

تستخدم شبكة المجسمات فى تصنيع المجسم وذلك بتخطيط شكل المجسم على سطح مستوى ثم طى هذا السطح لتكوين المجسم المطلوب.

فمثلًا :

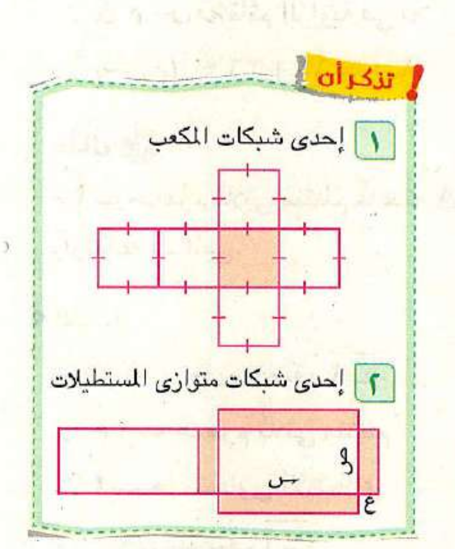


ونلاحظ من شبكة الهرم الرباعى المنتظم أن

١ عدد الأوجه = ٥ أوجه منهم أربعة جانبية ووجه واحد للقاعدة.

٢ عدد الأحرف = ٨ منهم ٤ أحرف جانبية.

٣ عدد الرؤوس = ٥ منهم رأس واحدة م تسمى رأس الهرم.

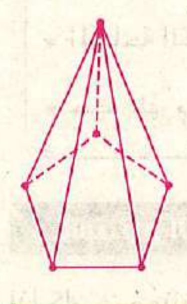


معلومة إثرائية

علاقة أويلر : لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة يكون :

(عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢)

فمثلًا في الهرم الخماسى :



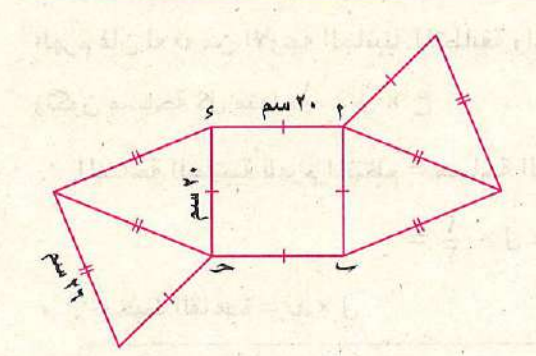
عدد الأوجه = ٦ أوجه ، عدد الرؤوس = ٦ رؤوس ، عدد الأحرف = ١٠ أحرف

أى أن عدد الأوجه + عدد الرؤوس = ٦ + ٦ = ١٢ ، عدد الأحرف + ٢ = ١٠ + ٢ = ١٢

∴ عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢

مثال ٣

الشبكة فى الشكل المقابل تمثل شبكة لهرم رباعى منتظم.



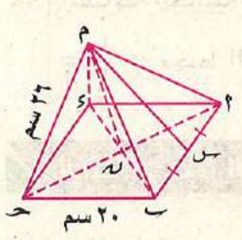
أوجد : ١ ارتفاع الهرم.

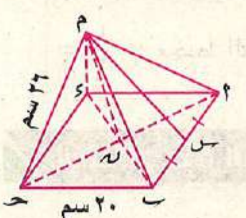
٢ الارتفاع الجانبى للهرم.

الحل

الشبكة تمثل هرمًا رباعيًا منتظمًا قاعدته المربع أ ب حـ ء

، ورأسه م وارتفاعه م ن حيث ن نقطة تقاطع قطرى القاعدة





∵ أ ب حـ ء مربع

∴ طول قطره = طول ضلعه × $\sqrt{2}$

∴ أ حـ = ٢٠ × $\sqrt{2}$ = ٢٠ $\sqrt{2}$ سم ∴ أ ن = ١٠ $\sqrt{2}$ سم

، ∵ م أ ب حـ ء هرم رباعى قائم ∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ مستوى القاعدة أ ب حـ ء



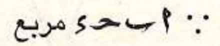
∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ن}}$ ∴ Δ أ ن م فيه : ق(∠ أ ن م) = °٩٠

∴ (م ن)^2 = (أ م)^2 − (أ ن)^2 = (٢٦)^2 − (١٠ $\sqrt{2}$)^2 = ٤٧٦

∴ م ن = $\sqrt{476}$ = ٢ $\sqrt{119}$ سم ∴ ارتفاع الهرم = ٢ $\sqrt{119}$ سم

وبفرض أن : س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ أ س = ١٠ سم

، ∵ م أ = م ب ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$



∴ Δ أ س م فيه : ق(∠ أ س م) = °٩٠

∴ (م س)^2 = (أ م)^2 − (أ س)^2 = (٢٦)^2 − (١٠)^2 = ٥٧٦

∴ م س = $\sqrt{576}$ = ٢٤ سم ∴ الارتفاع الجانبى للهرم = ٢٤ سم

(المساحة الجانبية للهرم المنتظم - المساحة الكلية للهرم - حجم الهرم)

* المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات الأوجه الجانبية.
* المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى.
* المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.
* حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع.

استنتاج المساحة الجانبية للهرم المنتظم

إذا كان هرم منتظم طول ضلع قاعدته المنتظمة ل وعدد أضلاع القاعدة ن ، ارتفاعه الجانبى عَ فإن من شبكة هذا الهرم فإن له ن من الأوجه الجانبية المتطابقة والمتساوية الساقين



وتكون مساحة كل منها $\frac{1}{2}$ × ل × عَ

∴ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = مساحة الوجه الواحد × ن

= $\frac{1}{2}$ × ل × عَ × ن

، ∵ محيط القاعدة = ن × ل

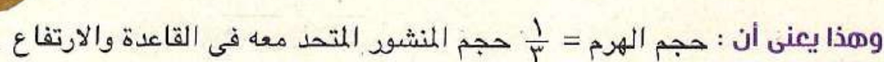
∴ المساحة الجانبية للهرم المنتظم
= $\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

استنتاج حجم الهرم

تجربة عملية



* أحضر وعاء مفرغ على شكل منشور قائم ووعاء آخر على شكل هرم قائم بحيث تكون قواعدهم متطابقة ولهما نفس الارتفاع كما بالشكل المقابل.
* املأ الوعاء الهرمى بحبات الأرز أو الرمل ثم قم بتفريغ ما به فى المنشور.
* لاحظ أنه بتكرار هذه العملية ثلاث مرات فإن المنشور سوف يمتلئ تمامًا بحبات الأرز أو الرمل.



وهذا يعنى أن : حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ حجم المنشور المتحد معه فى القاعدة والارتفاع

، ∵ حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

فإن حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

ملاحظـــات

١ فى الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه يكون ضعف مربع طول حرفه = ٣ أمثال مربع ارتفاعه

أى أن $٢ ل^٢ = ٣ ع^٢$ حيث ل = طول الحرف ، ع = الارتفاع

٢ المساحة الكلية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه = $ل^٢ \sqrt{٣}$ حيث ل طول الحرف.

٣ حجم الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢} ل^٣$ حيث ل طول حرفه.

مثال ٤

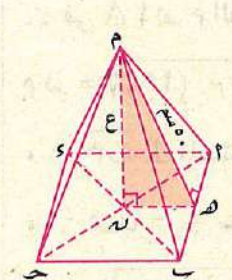
هرم رباعى منتظم طول قطر قاعدته $٦٠\sqrt{٢}$ سم وارتفاعه الجانبى ٥٠ سم

أوجد : ١ ارتفاع الهرم. ٢ المساحة الجانبية والكلية للهرم. ٣ حجم الهرم.

الحـــل

بفرض م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم تقاطع قطرا قاعدته فى ن ، هـ منتصف $\overline{أب}$

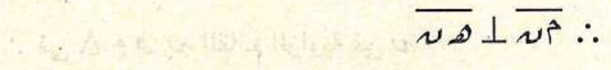
١ ∵ الهرم رباعى منتظم



∴ قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلع القاعدة = $\frac{٦٠\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = ٦٠ سم

، $\overline{من}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∴ $\overline{من} \perp \overline{هـن}$



∴ Δ م هـ ن قائم الزاوية فى ن

، ∵ هـ منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أجـ}$

∴ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٣٠ سم ∴ ع = $\sqrt{(٥٠)^٢ - (٣٠)^٢}$ = ٤٠ سم

٢ المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٦٠ × ٤) × ٥٠ = ٦٠٠٠ $سم^٢$

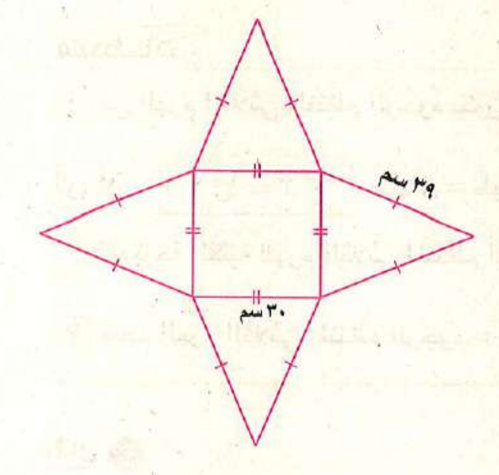
، ∵ مساحة القاعدة = ٦٠ × ٦٠ = ٣٦٠٠ $سم^٢$

∴ المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٦٠٠٠ + ٣٦٠٠ = ٩٦٠٠ $سم^٢$

٣ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × ٣٦٠٠ × ٤٠ = ٤٨٠٠٠ $سم^٣$

مثال ٥



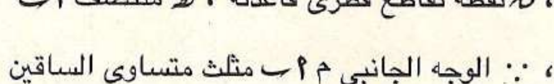
باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم
ثم أوجد مساحته الكلية وحجمه.

الحل

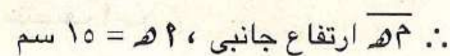
الشبكة لهرم رباعى منتظم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها = ٣٠ سم

وطول حرفه الجانبى = ٣٩ سم وبفرض الهرم م أ ب حـ ء

، ن نقطة تقاطع قطرى قاعدته ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$



، ∵ الوجه الجانبى م أ ب مثلث متساوى الساقين



∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ارتفاع جانبى ، أ هـ = ١٥ سم

∴ فى Δ أ هـ م القائم الزاوية فى هـ :

م هـ = $\sqrt{(\text{م أ})^2 - (\text{أ هـ})^2} = \sqrt{(٣٩)^2 - (١٥)^2}$ = ٣٦ سم

، ∵ $\overline{\text{م ن}}$ $\perp$ المستوى أ ب حـ ء ∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{هـ ن}}$

، ∵ هـ ن = $\frac{1}{2}$ ب حـ = ١٥ سم ∴ فى Δ م هـ ن القائم الزاوية فى ن :

م ن = $\sqrt{(\text{م هـ})^2 - (\text{هـ ن})^2} = \sqrt{(٣٦)^2 - (١٥)^2} = ٣\sqrt{١١٩}$ سم

∴ المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{1}{2}$ × (٣٠ × ٤) × ٣٦ = ٢١٦٠ سم^2

، مساحة القاعدة = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ سم^2

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = ٢١٦٠ + ٩٠٠ = ٣٠٦٠ سم^2

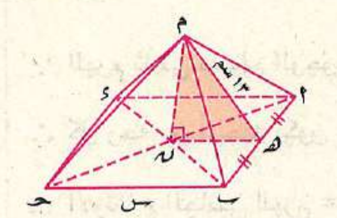
، الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ × ٩٠٠ × $٣\sqrt{١١٩}$ = $٩٠٠\sqrt{١١٩}$ سم^3

مثال ٦

م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم مساحته الكلية = ٣٦٠ سم^2 وارتفاعه الجانبى = ١٣ سم

أوجد طول ضلع قاعدته ثم أوجد حجمه.

الحل



نفرض أن طول ضلع المربع = س سم

، ∵ المساحة الكلية = ٣٦٠ سم^{2}

∴ مساحة القاعدة + المساحة الجانبية = ٣٦٠

∴ س × س + $\frac{1}{2}$ × ٤ س × ١٣ = ٣٦٠ ∴ س^{2} + ٢٦ س − ٣٦٠ = ٠

∴ (س + ٣٦) (س − ١٠) = ٠ ∴ س = − ٣٦ (مرفوض) أ، س = ١٠

∴ طول ضلع قاعدة الهرم = ١٠ سم

، ∵ هـ ن = $\frac{1}{2}$ ب حـ = ٥ سم

، ∵ Δ م هـ ن قائم الزاوية فى ن ∴ م ن = $\sqrt{(13)^{2} - (5)^{2}}$ = ١٢ سم

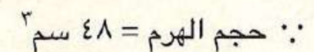
∴ الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ × $(10)^{2}$ × ١٢ = ٤٠٠ سم^{3}

مثال ٧

هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ سم^{3} وطول ضلع قاعدته = ٦ سم أوجد مساحته الكلية.

الحل

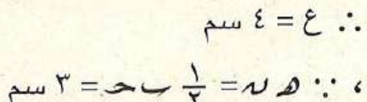
بفرض م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم ، ن نقطة تقاطع قطرى قاعدته ، هـ منتصف $\overline{أب}$



∵ حجم الهرم = ٤٨ سم^{3}

∴ $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع = ٤٨

∴ $\frac{1}{3}$ × ٦ × ٦ × ع = ٤٨ ∴ ع = ٤ سم



∴ ارتفاع الهرم = م ن = ٤ سم ، ∵ هـ ن = $\frac{1}{2}$ ب حـ = ٣ سم

، ∵ Δ م هـ ن قائم الزاوية فى ن ∴ م هـ = $\sqrt{(4)^{2} + (3)^{2}}$ = ٥ سم

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى + مساحة القاعدة

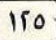
= $\frac{1}{2}$ × (٤ × ٦) × ٥ + ٦ × ٦ = ٩٦ سم^{2}

مثال ٨

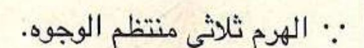
م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم الوجوه ، طول أى حرف من أحرفه يساوى ٨ $\sqrt{3}$ سم

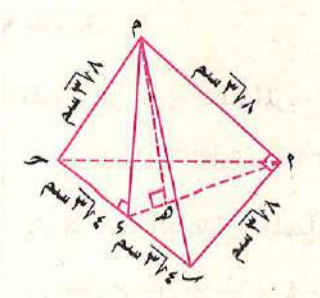
أوجد : ١ الارتفاع الجانبى. ٢ ارتفاع الهرم.

٣ المساحة الكلية للهرم. ٤ حجم الهرم.



الحل





∵ الهرم ثلاثى منتظم الوجوه.

∴ كل وجه من أوجهه يكون مثلث متساوى الأضلاع.

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = م ء = أ ء = ٨ $\sqrt{٣}$ حا ٦٠° = ١٢ سم

، ∵ هـ هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب ح

∴ أ هـ = $\frac{٢}{٣}$ أ ء = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ = ٨ سم

، ∵ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ المستوى أ ب ح

∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

∴ Δ م أ هـ قائم الزاوية فى هـ

∴ م هـ = $\sqrt{(٨\sqrt{٣})^{٢} - (٨)^{٢}}$ = ٨ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ارتفاع الهرم = ٨ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٣ × ٨ $\sqrt{٣}$) × ١٢ = ١٤٤ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

، مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ٨ $\sqrt{٣}$ × ٨ $\sqrt{٣}$ حا ٦٠° = ٤٨ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

∴ المساحة الكلية = ١٤٤ $\sqrt{٣}$ + ٤٨ $\sqrt{٣}$ = ١٩٢ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

، حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × ٤٨ $\sqrt{٣}$ × ٨ $\sqrt{٢}$ = ١٢٨ $\sqrt{٦}$ سم^{٣}

لاحظ أن

∵ الهرم ثلاثى منتظم الوجوه

∴ ٢ ل^{٢} = ٣ ع^{٢} ∴ ٢ × $(٨\sqrt{٣})^{٢}$ = ٣ ع^{٢}

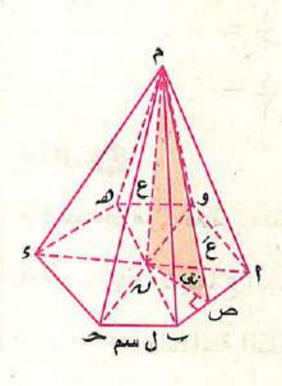
∴ ع = ٨ $\sqrt{٢}$ ∴ ارتفاع الهرم = ٨ $\sqrt{٢}$ سم

مثال ٩

هرم سداسى منتظم فيه مجموع مساحات الأوجه الجانبية سبعة أمثال مساحة القاعدة

أثبت أن حجم الهرم = ٨ نق^{٣} حيث نق طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل القاعدة.

الحل



نفرض أن طول ضلع الشكل السداسى = ل سم

، ارتفاع الهرم = ع ، الارتفاع الجانبى = عَ

، ∵ مجموع مساحات الأوجه الجانبية = ٧ × مساحة القاعدة

∴ $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى = ٧ × مساحة القاعدة

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ × ٦ ل × ع َ = ٧ × $\frac{1}{2}$ × ل × نق × ٦ $\therefore$ ٣ ل عَ = ٢١ ل نق

$\therefore$ عَ = ٧ نق

، $\because$ م ن ⊥ المستوى أ ب حـ ء هـ و $\therefore$ م ن ⊥ ن ص

$\therefore$ Δ م ن ص قائم الزاوية فى ن

$\therefore$ ع = $\sqrt{\text{عَ}^2 - \text{نق}^2}$ = $\sqrt{(٧\ \text{نق})^2 - \text{نق}^2}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ نق

، $\because$ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ × $\frac{1}{2}$ × ل × نق × ٦ × ٤ $\sqrt{٣}$ نق = ٤ $\sqrt{٣}$ ل نق^2

، $\because$ نق = ل ظا ٦٠° $\therefore$ ل = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ نق

$\therefore$ حجم الهرم = ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ نق × نق^2 = ٨ نق^3

مثال ١٠

م أ ب حـ هرم ثلاثى رأسه م على بعد ٤ $\sqrt{٥}$ سم من قاعدته أ ب حـ حيث أ ب = ٧ سم

، ب حـ = ٨ سم ، أ حـ = ٩ سم أوجد حجم الهرم.

الحل

تذكر أن

مساحة Δ أ ب حـ = $\sqrt{ح\ (ح - أ ب)\ (ح - ب حـ)\ (ح - أ حـ)}$

حيث ح نصف محيط المثلث أ ب حـ

$\because$ محيط Δ أ ب حـ

= ٧ + ٨ + ٩

= ٢٤ سم

$\therefore$ نصف المحيط = ١٢ سم

$\therefore$ مساحة المثلث أ ب حـ = $\sqrt{١٢\ (١٢ - ٧)\ (١٢ - ٨)\ (١٢ - ٩)}$ = ١٢ $\sqrt{٥}$ سم^2

$\therefore$ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ × ١٢ $\sqrt{٥}$ × ٤ $\sqrt{٥}$ = ٨٠ سم^3

تمارين 7

على الهرم



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الهرم وأحد رؤوس قاعدته تسمى ....

(أ) ارتفاع الهرم. (ب) ارتفاعه الجانبى. (جـ) حرفه الجانبى. (د) ضلع قاعدته.

(٢) إذا كان : م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم فإن الهرم يجب أن يكون ....

(I) منتظم الأوجه. **(II)** قاعدته مربعة. **(III)** قائم.

(أ) I ، II (ب) II ، III (جـ) I (د) I ، II ، III

(٣) أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) الأوجه الجانبية للهرم القائم تكون متطابقة. (ب) الهرم المنتظم هو هرم قائم.

(جـ) ارتفاعات الأوجه الجانبية للهرم تكون متساوية.

(د) أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا = ٣ مستويات.

(٤) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) الهرم القائم يمكن أن تكون قاعدته سطح معين.

(ب) الهرم الثلاثى له ثلاثة أوجه. (جـ) الهرم الخماسى له ستة أوجه.

(د) الهرم الرباعى جميع أوجهه الجانبية سطوح مثلثات.

(٥) فى الهرم المنتظم أى الأطوال الآتية مرتبة من الأصغر إلى الأكبر ؟

(أ) طول الحرف الجانبى ، ارتفاع الهرم ، الارتفاع الجانبى.

(ب) ارتفاع الهرم ، الارتفاع الجانبى ، طول الحرف الجانبى.

(جـ) الارتفاع الجانبى ، ارتفاع الهرم ، طول الحرف الجانبى.

(د) طول الحرف الجانبى ، الارتفاع الجانبى ، ارتفاع الهرم.

(٦) الشكل الذى يصلح أن يكون قاعدة لهرم رباعى منتظم هو ....

(أ) متوازى الأضلاع. (ب) المعين. (جـ) المستطيل. (د) المربع.

(٧) إذا كان : م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم فإن جميع أحرفه الجانبية ....

(أ) متوازية. (ب) متطابقة.

(جـ) عمودية على القاعدة. (د) متعامدة مثنى مثنى.

(٨) إذا كان : م أ ب حـ هرم ثلاثى قائم ، ن مسقط النقطة م على المستوى أ ب حـ ، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$
فإن كل المثلثات الآتية تكون قائمة ما عدا ....

(أ) Δ م ن حـ (ب) Δ م ن هـ (جـ) Δ م ب حـ (د) Δ م ن أ

(٩) إذا كان : م أ ب حـ هرم منتظم الأوجه ، ن مسقط النقطة م على المستوى أ ب حـ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$
فأى مما يأتى يكون مثلث متساوى الأضلاع ؟

(أ) Δ م ن هـ (ب) Δ م ب هـ (جـ) Δ أ حـ هـ (د) Δ م ب حـ

(١٠) عدد جميع أوجه الهرم الخماسى المنتظم هو ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ١٠

(١١) إذا علمت أن هرم له عدد أوجه «م»، عدد رؤوس «ن» فإن عدد أحرفه = ...

(أ) م + ن (ب) م + ن − ١ (جـ) م + ن − ٢ (د) م + ن + ٢

(١٢) فى الهرم السداسى يكون عدد الأوجه + عدد جميع رؤوسه − عدد أحرفه = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٣) فى الشكل المقابل :

هرم رباعى منتظم فإن ارتفاعه = ... سم.

٦ سم
٤ سم

(أ) ٧ √٢ (ب) ٢ √٧
(جـ) ٤ √٢ (د) ٢ √٥

(١٤) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٦ سم ، وطول حرفه الجانبى ٨ سم
فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ٥ √٢ (ب) √٤٦ (جـ) √٨٥ (د) ٤٨

(١٥) أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟

(أ) (ب) (جـ) (د)

(١٦) أى المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة ؟

(أ) هرم رباعى. (ب) هرم رباعى منتظم.
(جـ) هرم ثلاثى منتظم الوجوه. (د) غير ذلك.

(١٧) النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه : ارتفاعه = ...

(أ) $\sqrt{٢} : \sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣} : ٢$ (جـ) $\sqrt{٦} : ٢$ (د) $\sqrt{٣} : ٣$

(١٨) النسبة بين طول حرف الهرم المنتظم الوجوه : ارتفاعه الجانبى = ...

(أ) $٢\sqrt{٢} : \sqrt{٣}$ (ب) $٢\sqrt{٣} : ٣$ (جـ) $\sqrt{٦} : ٢$ (د) $\sqrt{٦} : ٣$

(١٩) إذا قطعنا هرمًا رباعيًا منتظمًا بمستوى يوازى قاعدته فإن المقطع الحادث يكون ....

(أ) مثلثًا. (ب) مربعًا. (جـ) مستطيلًا. (د) دائرة.

(٢٠) هرم رباعى قائم قاعدته معين طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه = ... سم^{٣}

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٦٠ (د) ٢٠٠

(٢١) هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم ، وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... سم^{٣}

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

(٢٢) هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته = ٨ سم ، ارتفاعه = ١٠ سم
فإن حجمه يساوى .... سم^{٣}.

(أ) $٣٢٠\sqrt{٣}$ (ب) $٩٦٠\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{٣٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ (د) ١٦٠

(٢٣) هرم منتظم حجمه ١٢ سم^{٣} ومساحة قاعدته ٤ سم^{٢} فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٢

(٢٤) هرم رباعى منتظم حجمه ٦٤ سم^{٣} وارتفاعه = ٦ سم فإن محيط القاعدة = ... سم.

(أ) ٨ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) ١٦ (د) $١٦\sqrt{٢}$

(٢٥) هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨٠ سم^{٣} وطول ضلع قاعدته ١٢ سم فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٥

(٢٦) إذا كان حجم هرم سداسى منتظم يساوى $٨\sqrt{٣}$ سم^{٣} وارتفاعه يساوى ٤ سم
فإن محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) $٦\sqrt{٣}$

(٢٧) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاعه الجانبى ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... سم^{٢}

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

(٢٨) هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته = ١٠٠ سم^{٢} وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ٢٦٠ (ب) ٥٢٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٣٦٠

(٢٩) المساحة الكلية لهرم رباعى قائم قاعدته مضلع منتظم طول قطره = $١٠\sqrt{٢}$ سم وارتفاعه = $٥\sqrt{٣}$ سم تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ٤٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٣٠٠

(٣٠) هرم رباعى منتظم مساحته الجانبية = ٣٠ سم^2 ، ارتفاعه الجانبى = ٥ سم
فإن محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

(٣١) هرم ثلاثى منتظم الوجوه ، وطول حرفه ١٠ سم فتكون مساحته الكلية يساوى .... سم^2

(أ) ٤٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ١٠٠ $\sqrt{3}$ (د) ٢٥ $\sqrt{3}$

(٣٢) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الوجوه يساوى ١٨ سم
فإن مساحته الكلية = ... سم^2

(أ) $\frac{27\sqrt{2}}{4}$ (ب) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (جـ) ٩ $\sqrt{3}$ (د) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

(٣٣) إذا كانت مساحة هرم منتظم الوجوه الكلية = ٣٦ $\sqrt{3}$ سم^2 فإن مجموع أطوال أحرفه = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٣٦

(٣٤) هرم ثلاثى منتظم الوجوه مساحته الكلية = ٩ $\sqrt{3}$ سم^2 فإن طول حرفه = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) $\sqrt{3}$

(٣٥) هرم ثلاثى منتظم طول ضلع قاعدته ٦ ل سم وارتفاعه ل سم فإن مساحته الجانبية .... سم^2

(أ) ٢٧ $\sqrt{3}$ ل^2 (ب) ١٨ ل^2 (جـ) ٩ $\sqrt{3}$ ل^2 (د) ٣٦ ل^2

(٣٦) هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ٦ سم يكون حجمه = ... سم^3

(أ) ٢٧ $\sqrt{3}$ (ب) ٣٦ $\sqrt{3}$ (جـ) ٥٤ $\sqrt{2}$ (د) ١٨ $\sqrt{2}$

(٣٧) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الأوجه يساوى ١٨ سم فإن حجمه = ... سم^3

(أ) ٩ $\sqrt{2}$ (ب) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ (جـ) $\frac{27\sqrt{2}}{5}$ (د) ٩ $\sqrt{3}$

(٣٨) إذا كان الارتفاع الجانبى لهرم ثلاثى منتظم الوجوه يساوى ٥ $\sqrt{3}$ سم
فإن مجموع مساحات أوجهه = ... سم^2

(أ) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ (ب) ٢٥ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٠٠ $\sqrt{3}$ (د) ٥٠ $\sqrt{3}$

(٣٩) هرم رباعى قائم قاعدته على شكل معين طول ضلعه يساوي طول أحد قطرى المعين يساوى ٦ سم
فإذا كان ارتفاع الهرم = ١٢ سم فإن حجم الهرم = ... سم^3

(أ) ٧٢ $\sqrt{3}$ (ب) ١٦ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٤٤ (د) ٧٢

(٤٠) أ ب حـ ء أَ بَ حَ ءَ مكعب طول حرفه = ٦ سم فإن حجم الهرم بَ أ ب حـ = ... سم^3

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ (جـ) ٣٦ $\sqrt{3}$ (د) ١٨ $\sqrt{3}$

(٤١) هرم رباعى منتظم مساحته الكلية = ٧٠ سم^2 ومساحته الجانبية = ٤٥ سم^2
فإن ارتفاع الهرم = ... سم.

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{14}$ (د) ٤,٥

(٤٢) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، ومساحة أحد أوجهه الجانبية ٦٠ سم²
فإن مساحته الكلية يساوى .... سم²

(أ) ٦٠٠ (ب) ٣٤٠ (جـ) ١٦٠ (د) ٢٤٠

(٤٣) النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

(٤٤) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ارتفاعه الجانبى فإن النسبة بين مساحته الجانبية : مساحته الكلية = ...

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ١ : ٢ (د) ٣ : ٥

(٤٥) هرم رباعى منتظم مساحة أى وجه من أوجهه الجانبية تساوى مساحة قاعدته المربعة فإذا كان طول ضلع قاعدة الهرم = ٦ سم فإن حجم الهرم = ... سم³

(أ) ٣٦ (ب) $٦\sqrt{٣}$ (جـ) $٣٦\sqrt{١٥}$ (د) $٢١٦\sqrt{١٥}$

(٤٦) إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعى منتظم مع ثبوت ارتفاعه فإن حجمه ....

(أ) يتضاعف. (ب) لا يتغير.

(جـ) يتضاعف أربع مرات. (د) يتضاعف ستة مرات.

(٤٧) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم³
فإن مساحته الجانبية = ... سم²

(أ) ٢٧٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ٤٥٠ (د) ٥٤٠

(٤٨) هرم قائم قاعدته مربع وجميع أحرفه الثمانية متساوية وكل منهم طوله يساوى أ سم
فإن مساحته الجانبية = ...

(أ) ٣ أ² (ب) ٤ أ² (جـ) $\sqrt{٣}$ أ² (د) $٤\sqrt{٣}$ أ²

(٤٩) إذا كان الهرم م أ ب حـ ثلاثى رأسه م على بعد ١٥ سم من قاعدته أ ب حـ وأطوال أضلاع قاعدته ٥ ، ٦ ، ٧ سم فإن حجمه = ... سم³

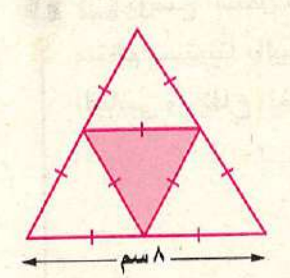
(أ) $١٥\sqrt{٣}$ (ب) $١٠\sqrt{٦}$ (جـ) $٣٠\sqrt{٦}$ (د) ٩٠

(٥٠) فى الشكل المقابل :

م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ سم³ وارتفاعه ٤ سم
، هـ حـ = هـ ب ، $\overline{أحـ} \cap \overline{بء} = \{ح\}$
، ق(∠م ح هـ) = ق(∠ح هـ ب) = ق(∠م هـ ب) = ٩٠°
فإن المساحة الجانبية للهرم = ... سم²

(أ) ١٨ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٦ (د) ٦٠

(٥١) باستخدام الشبكة التى أمامك فإن المساحة الجانبية للمجسم الناتج = ... سم^2.



(أ) ٨ $\sqrt{3}$
(ب) ١٢ $\sqrt{3}$
(جـ) ١٦ $\sqrt{3}$
(د) ٢٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ في الهرم الخماسى المنتظم :

(١) ما عدد أوجهه الجانبية ؟
(٢) ما عدد الأوجه ؟
(٣) ما عدد أحرفه الجانبية ؟
(٤) ما عدد أحرفه ؟
(٥) للهرم رأس واحدة خلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسى ؟
هل تحقق إجابتك علاقة أويلر لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة ؟

---

٢ م أ ب جـ د هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته يساوى ١٠ سم ، وارتفاعه ١٢ سم.
أوجد ارتفاعه الجانبى.
«١٣ سم»

---

٣ م أ ب جـ د هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٢٠ سم ، وارتفاعه الجانبى ٢٥ سم.
أوجد طول ضلع قاعدة الهرم.
«٣٠ سم»

---

٤ م أ ب جـ د هرم رباعى منتظم قاعدته المربع أ ب جـ د فإذا كان ارتفاعه يساوى ٤ $\sqrt{3}$ سم وطول حرفه الجانبى م أ = ٤ $\sqrt{5}$ سم احسب طول ضلع قاعدته.
«٨ سم»

---

٥ م أ ب جـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته Δ أ ب جـ المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ١٢ سم فإذا كان ارتفاع الهرم يساوى ٦ سم فأوجد طول حرفه الجانبى.
«٢ $\sqrt{21}$ سم»

---

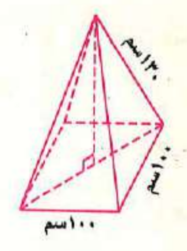
٦ م أ ب جـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣ سم فإذا كان طول حرفه الجانبى = $\sqrt{7}$ سم فأوجد ارتفاع الهرم.
«٢ سم»

---

٧ م أ ب جـ هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ١٢ سم احسب ارتفاعه وارتفاعه الجانبى.
«٤ $\sqrt{6}$ سم ، ٦ $\sqrt{3}$ سم»

---

٨ هرم سداسى منتظم ارتفاعه ٨ سم وقاعدته مسدس منتظم محيطه ٢٤ $\sqrt{3}$ سم
احسب طول حرفه وارتفاعه الجانبى.
«٤ $\sqrt{7}$ سم ، ١٠ سم»

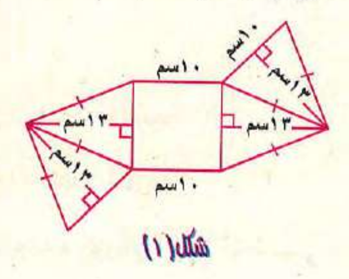


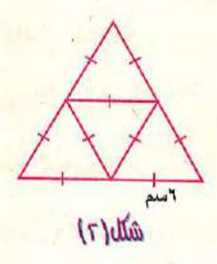
٩ يوضح الشكل المقابل خزان مياه على شكل هرم رباعى منتظم مستعينًا بالبيانات المعطاة أوجد كلًا من ارتفاع الوجه الجانبى وارتفاع الخزان.

«١٢٠ سم ، ١٠ $\sqrt{119}$ سم»

---

١٠ كل من الشكلين التاليين يمثل شبكة مجسم. صف المجسم واحسب ارتفاعه :





«١٢ سم ، ٢ $\sqrt{6}$ سم»

---

١١ هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو) هو هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا ، وارتفاعه الجانبى ١٨٦ مترًا أوجد ارتفاع الهرم.

«١٤٥,٤ متر»

---

١٢ م أ ب حـ هرم ثلاثى قائم طول حرفه م أ = ٢٥ سم وقاعدته أ ب حـ على شكل مثلث قائم الزاوية فى أ بحيث : ب أ = ١٦,٨ سم ، حـ أ = ١٢,٦ سم أوجد ارتفاع الهرم.

«٢٤ سم»

---

١٣ م أ ب حـ ء هرم رباعى قائم قاعدته المعين أ ب حـ ء فيه : أ حـ = ١٦ سم ، ب ء = ١٢ سم ، ن نقطة تقاطع قطريه فإذا كان ارتفاع الهرم م ن = ١٠ سم فأوجد أطوال أحرفه الجانبية.

«٢ $\sqrt{34}$ سم ، ٢ $\sqrt{41}$ سم»

---

١٤ هرم ثلاثى منتظم ارتفاعه ١٢ سم وطول ضلع قاعدته ١٨ سم أوجد حجم الهرم.

«٣٢٤ $\sqrt{3}$ سم^3»

---

١٥ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم قاعدته أ ب حـ ء حيث : أ ب = ١٠ سم وارتفاع الهرم = ١٢ سم **أوجد :**

(١) طول أى ارتفاع جانبى. (٢) حجم الهرم.

(٣) المساحة الكلية للهرم.

«١٣ سم ، ٤٠٠ سم^3 ، ٣٦٠ سم^2»

---

١٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠ $\sqrt{3}$ سم **أوجد :**

(١) المساحة الجانبية. (٢) حجم الهرم.

«٨٠٠ سم^2 ، $\frac{٤٠٠٠}{٣}\sqrt{3}$ سم^3»

---

١٧ هرم رباعى منتظم طول قطر قاعدته ٢٤ $\sqrt{2}$ سم وارتفاعه الجانبى = ٢٠ سم أوجد مساحته الكلية وحجمه.

«١٥٣٦ سم^2 ، ٣٠٧٢ سم^3»

١٨ م أ ب حـ ء هرم رباعى قائم قاعدته أ ب حـ ء مربع طول ضلعه $٨\sqrt{٢}$ سم وطول حرفه الجانبى يساوى $٤\sqrt{٦}$ سم أوجد :

① المساحة الجانبية للهرم. ② حجم الهرم. «$١٢٨\sqrt{٢}$ سم^٢ ، $\frac{٥١٢}{٣}\sqrt{٢}$ سم^٣»

---

١٩ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ٢٠ سم وطول حرفه الجانبى = ٢٦ سم أوجد :

① الارتفاع الجانبى للهرم. ② ارتفاع الهرم. ③ المساحة الجانبية للهرم.

④ حجم الهرم. «٢٤ سم ، $٢\sqrt{١١٩}$ سم ، ٩٦٠ سم^٢ ، $\frac{٨٠٠}{٣}\sqrt{١١٩}$ سم^٣»

---

٢٠ هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه = ١٢ سم أوجد ارتفاعه ثم أوجد حجم الهرم ومساحته الكلية.

«$٤\sqrt{٦}$ سم ، $١٤٤\sqrt{٢}$ سم^٣ ، $١٤٤\sqrt{٣}$ سم^٢»

---

٢١ م أ ب حـ ء هرم قائم قاعدته أ ب حـ ء على شكل مربع طول ضلعه = ١٨ سم

، م أ = م ب = م حـ = م ء = ١٥ سم أوجد :

① المساحة الكلية للهرم. ② حجم الهرم. «٧٥٦ سم^٢ ، $٣٢٤\sqrt{٧}$ سم^٣»

---

٢٢ احسب لأقرب رقم عشرى واحد حجم هرم خماسى منتظم ، طول ضلع قاعدته = ١٦ سم وارتفاعه ١٢ سم

«١٧٦١٫٨ سم^٣»

---

٢٣ هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبى $١٠\sqrt{٣}$ سم أوجد :

① مساحته الجانبية. ② مساحته الكلية. «$٣٦٠\sqrt{٣}$ سم^٢ ، $٥٧٦\sqrt{٣}$ سم^٢»

---

٢٤ أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاة :

① ١٠ سم ، ٩ سم

② ١٥ سم ، ١٢ سم

③ ٢٤ سم ، ٢٠ سم

④ م ، أ ، و ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، ١٣ سم ، ١٠ سم

---

٢٥ أوجد حجم الهرم المنتظم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاة :

① ٢١ سم ، ١٠ سم

② ١٤ سم ، ٨ سم

③ ١٢ سم ، ٦ سم

④ ١٧ سم ، ١٥ سم

٢٦ هرم رباعى ارتفاعه ١٢ سم وقاعدته على شكل معين طولا قطريه ٤ ، ٨ سم

أثبت أن حجمه يساوى حجم مكعب طول حرفه ٤ سم

٢٧ م أ ب حـ هرم ثلاثى رأسه م على بعد ١٥ سم من قاعدته أ ب حـ وأطوال أضلاع

قاعدته المثلثة هى : ٥ ، ٦ ، ٧ سم أوجد حجمه. «$٣٠\sqrt{٦}$ سم^٣»

٢٨ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠ سم^٢ وارتفاعه الجانبى ٢٠ سم أوجد حجمه. «٣٥٠٠ سم^٣»

٢٩ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٩ سم^٢ وطول حرفه الجانبى ٥ سم أوجد حجمه. «١٣,٦ سم^٣»

٣٠ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠ سم^٣ وارتفاعه ١٢ سم احسب مساحته الجانبية. «٢٦٠ سم^٢»

٣١ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^٣

فأوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية. «١٥ سم ، ٥٤٠ سم^٢»

٣٢ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ١٢ سم ومساحته الكلية = ٣٨٤ سم^٢ أوجد حجم الهرم. «٣٨٤ سم^٣»

٣٣ هرم قائم قاعدته على شكل مربع طول قطره = $١٠\sqrt{٢}$ سم فإذا كانت مساحته الجانبية = ٢٦٠ سم^٢

أوجد حجم الهرم. «٤٠٠ سم^٣»

٣٤ م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم طول ضلع قاعدته ٣ سم وطول حرفه الجانبى = $\sqrt{٧}$ سم

أوجد حجمه ومساحته الجانبية. «$\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ سم^٣ ، $\frac{٩}{٤}\sqrt{١٩}$ سم^٢»

٣٥ هرم سداسى منتظم ارتفاعه ٨ سم ومحيط قاعدته $٢٤\sqrt{٣}$ سم احسب مساحته الجانبية والكلية.
«$١٢٠\sqrt{٣}$ سم^٢ ، $١٩٢\sqrt{٣}$ سم^٢»

٣٦ أوجد حجم هرم قائم ارتفاعه الجانبى ١٠ سم وقاعدته على شكل مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة

طول نصف قطرها ١٢ سم. «$٢٨٨\sqrt{٣}$ سم^٣»

٣٧ باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم

وأوجد مساحته الكلية.

١٨ سم
١٨ سم
١٨ سم

«$٤٣٢\sqrt{٣}$ سم^٢»

٣٨ الربط بالصناعة : تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى بطى شبكة المجسم المقابلة.

(١) أوجد مساحة الورق المقوى المستخدم لإنتاج ١٠٠٠ عبوة.

(٢) احسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥ جنيهًا. «٣٤ م^{٢} ، ٥١٠ جنيه»

---

٣٩ م ٢ ب ح ء هرم رباعى قائم قاعدته المربع ٢ ب ح ء وكان طول أى حرف جانبى يساوى ٦ $\sqrt{٥}$ سم وكان ارتفاع الهرم = ٦ $\sqrt{٣}$ سم أوجد :

(١) المساحة الكلية للهرم. (٢) حجم الهرم. «٤٣٢ سم^{٢} ، ٢٨٨ $\sqrt{٣}$ سم^{٣}»

---

٤٠ الربط بالسياحة : صنع نموذج للهرم الأكبر (هرم رباعى منتظم) من سبيكة معدنية كثافتها ٣,٢ جم/سم^{٣} إذا كان طول ضلع قاعدة النموذج ١١,٥ وارتفاعه ٧ سم ، فاحسب كتلته لأقرب رقم عشرى واحد. «٩٨٧,٥ جم»

---

٤١ اهتمت فرنسا بالآثار المصرية القديمة فنقلت بعضها إلى باريس لتعرض فى متاحفها كما أنشأت هرمًا جوانبه من الزجاج الشفاف مشابهًا للهرم الأكبر (هرم رباعى منتظم) ليكون مدخلاً رئيسيًا لمتحف اللوفر بباريس. إذا علمت أن ارتفاعه ٢١,٦ متر وطول ضلع قاعدته ٣٥ مترًا ، فأوجد مساحة الزجاج المستخدم فى بنائه لأقرب متر مربع. «١٩٤٦ م^{٢}»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ هرم سداسى منتظم طول ضلع القاعدة = ٢ ل ، وارتفاع الهرم = ٣ ل

أثبت أن : المساحة الجانبية للهرم تساوى ضعف مساحة قاعدته.

---

٢ م ٢ ب ح ء هرم رباعى منتظم إذا كان طول الحرف الجانبى للهرم = طول قطر القاعدة = ل

أثبت أن : المساحة الكلية للهرم = $\frac{ل^{٢}}{٢}$ $\left(١ + \sqrt{٧}\right)$

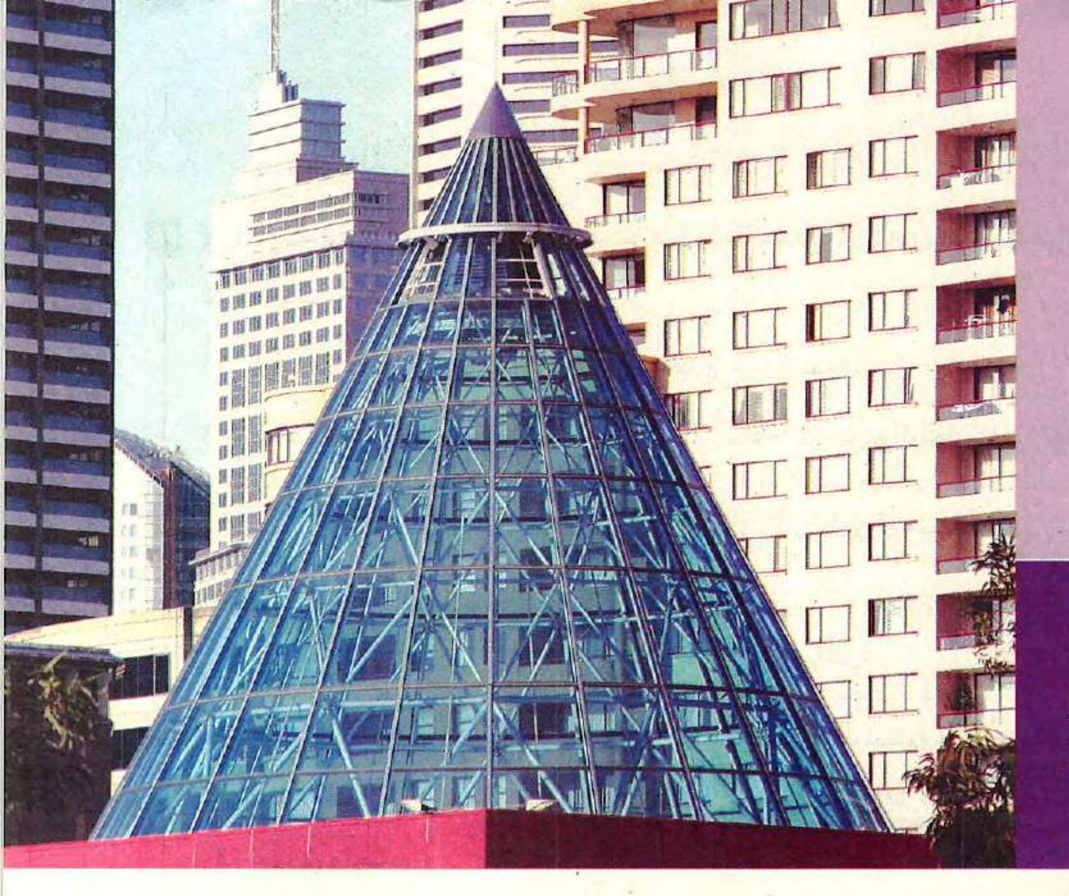
---

٣ أسطوانة دائرية قائمة جوفاء وضع بداخلها هرم ثلاثى قائم م ٢ ب ح قاعدته ٢ ب ح مثلث متساوى الأضلاع رءوسه تقع على محيط القاعدة السفلى للأسطوانة ، م رأس الهرم هى مركز القاعدة العليا للأسطوانة. أوجد النسبة بين حجمى الهرم والأسطوانة. «$\frac{\sqrt{٣}}{٤\pi}$»

---

٤ هرم قائم قاعدته مربع وجميع أحرفه الثمانية متساوية ومساحته الكلية = $\left(\sqrt{٣} + ١\right)$ ٢

أوجد طول حرفه بدلالة ٢ «$\sqrt{٢}$»



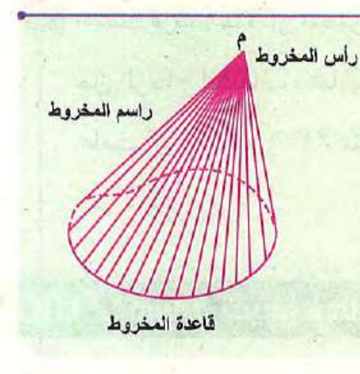
الدرس

3

المخـــروط

تعريف المخروط

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة ، ويتكون سطحه الجانبى من جميع القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته والتى يعرف كل منها براسم المخروط.



المخروط الدائرى القائم

هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور.

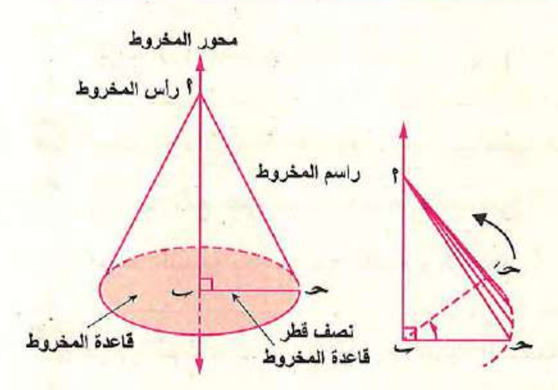
أو هو الفراغ الذى ينشأ من طى قطاع دائرى بحيث ينطبق نصفا قطريه كلٍ على الآخر.

فى الشكل المقابل :

إذا دار المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{أب}$ كمحور فإن المجسم الناشئ من هذا الدوران يسمى مخروط دائرى قائم وتسمى النقطة أ رأس المخروط ، $\overline{أحـ}$ راسم المخروط

، $\overleftrightarrow{أب}$ محور المخروط

، سطح الدائرة ب قاعدة المخروط.



* خواص المخروط الدائرى القائم :

١ محور المخروط الدائرى القائم يكون عموديًا على مستوى القاعدة.

أى أن  ⊥ مستوى الدائرة ب

٢ ارتفاع المخروط الدائرى القائم هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المخروط ومركز قاعدته وهو دائمًا أقل من طول راسم المخروط.



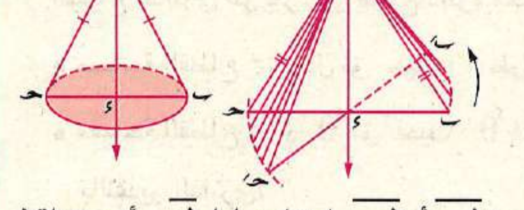
فإذا فرضنا أن :

طول $\overline{أب}$ = ع وحدة طول ، وطول $\overline{أحـ}$ = ل وحدة طول

فإن : ارتفاع المخروط (ع) = $\sqrt{ل^2 - نق^2}$ ويكون ع < ل دائمًا

ملاحظـة

من الممكن أن ينشأ المخروط الدائرى القائم من دوران مثلث متساوى الساقين حول محور تماثله نصف دورة كامل.



فى الشكل المقابل :

إذا كان Δ أ ب حـ متساوى الساقين فيه :

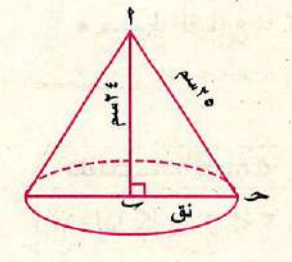
أ ب = أ حـ ، $\overleftrightarrow{أء}$ محور تماثل Δ أ ب حـ

فإذا دار المثلث أ ب حـ حول $\overleftrightarrow{أء}$ نصف دورة كاملة فإنه ينشأ مخروط دائرى قائم قاعدته سطح الدائرة ء وراسمه $\overline{أب}$ أو $\overline{أحـ}$ وارتفاعه طول $\overline{أء}$ ورأسه نقطة أ

مثال ١

مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم وارتفاعه ٢٤ سم

أوجد محيط ومساحة قاعدة المخروط $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$



الحـــل

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ مستوى الدائرة ب   ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overline{بحـ}$

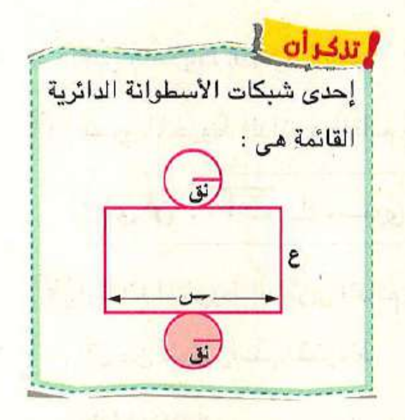
∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°   ∴ $(بحـ)^2 = (أحـ)^2 - (أب)^2 = (٢٥)^2 - (٢٤)^2 = ٤٩$

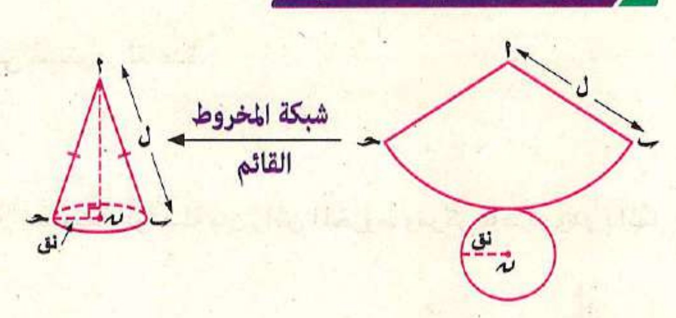
∴ ب حـ = ٧ سم   ∴ نق (طول نصف قطر القاعدة) = ٧ سم

∴ محيط القاعدة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

، مساحة سطح القاعدة = π $نق^2$ = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ = ١٥٤ $سم^2$

شبكة المخروط القائم





ونلاحظ من شبكة المخروط أن

١ أب = أحـ = ل حيث ل طول راسم المخروط.

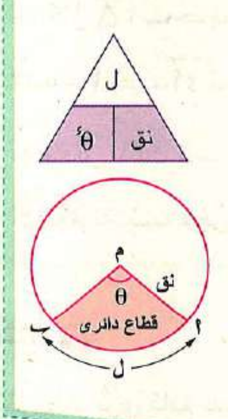
٢ القطاع الدائرى أب حـ يمثل السطح الجانبى للمخروط. وطول $\overset{\frown}{بحـ}$ = محيط الدائرة ن = ٢ π نق

٣ سطح الدائرة ن يمثل قاعدة المخروط.

تذكر أن

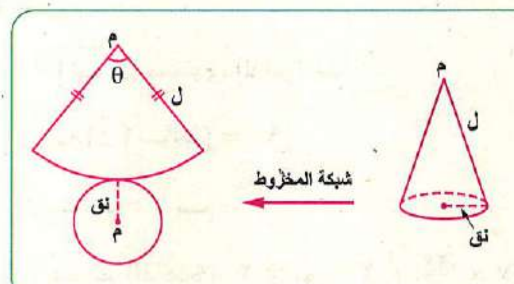
القطاع الدائرى هو جزء من سطح دائرة محدود بنصفى قطرين وقوس من الدائرة.

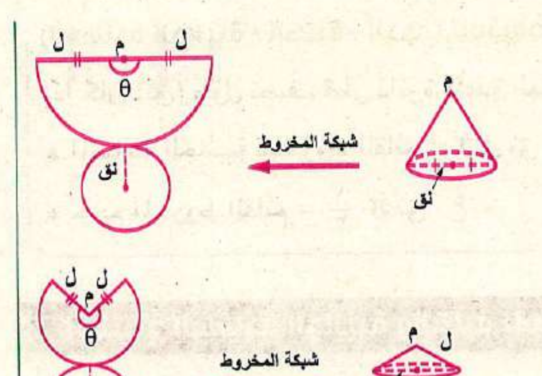
- مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق حيث : ل طول قوس القطاع.
- مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ $\theta^{د}$ نق^2 حيث : $\theta^{د}$ قياس زاوية القطاع بالتقدير الدائرى.
- مساحة القطاع = $\frac{س^\circ}{360^\circ}$ × π نق^2 = $\frac{س^\circ}{360^\circ}$ × مساحة الدائرة حيث س° القياس الستينى لزاوية القطاع.
- محيط القطاع = ٢ نق + ل وحدة طول.



ملاحظات هامة

١ إذا كان : ل > ٢ نق تكون شبكة المخروط كما هو موضح بالشكل وتكون ٠° < θ < ١٨٠°





٢ إذا كان : ل = ٢ نق تكون شبكة المخروط

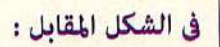
كما هو موضح بالشكل

وتكون θ = ١٨٠°

٣ إذا كان : ل > ٢ نق تكون شبكة المخروط

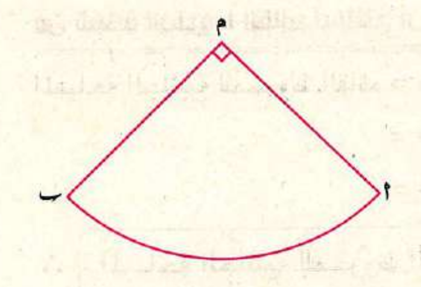
كما هو موضح بالشكل

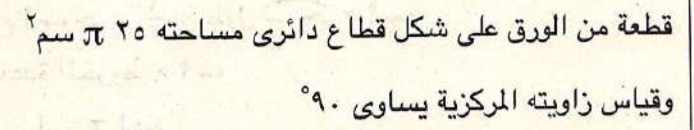
وتكون ١٨٠° < θ < ٣٦٠°



مثال ٢

فى الشكل المقابل :



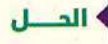


قطعة من الورق على شكل قطاع دائرى مساحته ٢٥ π سم^2

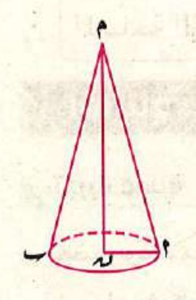
وقياس زاويته المركزية يساوى ٩٠°

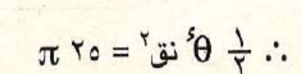
طويت بحيث تلامس $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ وتحولت إلى عبوة ورقية

على شكل مخروط فأوجد ارتفاع العبوة لأقرب جزء من عشرة.



الحـــل





∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ θً نق^2 ∴ $\frac{1}{2}$ θً نق^2 = ٢٥ π

∴ $\frac{1}{2}$ × $\frac{\pi}{2}$ × نق^2 = ٢٥ π ∴ نق^2 = ١٠٠

∴ نق = ١٠ سم ∴ م أ = ١٠ سم

، ∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق ∴ $\frac{1}{2}$ ل × ١٠ = ٢٥ π

∴ ل = ٥ π سم ∴ طول $\overset{\frown}{أب}$ = ٥ π سم

∴ محيط الدائرة ن = ٥ π سم ∴ ٢ π نق$_ن$ = ٥ π ∴ نق$_ن$ = ٢,٥ سم

∴ $\triangle$ أ ن م فيه : ق(∠ أ ن م) = ٩٠° ، ن أ = ٢,٥ سم ، م أ = ١٠ سم

∴ م ن = $\sqrt{(م أ)^2 - (ن أ)^2}$ = $\sqrt{(١٠)^2 - (٢,٥)^2}$ ≃ ٩,٧ سم

∴ ارتفاع العبوة = ٩,٧ سم

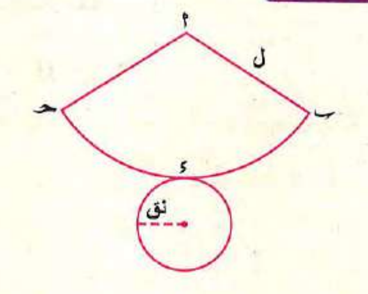
(المساحة الجانبية / الكلية - الحجم) للمخروط القائم

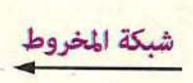
إذا كان (نق) طول نصف قطر دائرة قاعدة المخروط ، (ل) طول الراسم ، (ع) ارتفاع المخروط فإن :

* المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق * المساحة الكلية للمخروط القائم = π نق (ل + نق)

* حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

استنتاج المساحة الجانبية والكلية للمخروط القائم







من شبكة المخروط القائم نستنتج أن :

المساحة الجانبية للمخروط القائم = مساحة القطاع أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × طول $\overset{\frown}{ب حـ}$ × أ ب

= $\frac{1}{2}$ × محيط قاعدة المخروط × أ ب

= $\frac{1}{2}$ × ٢ π نق × ل = π ل نق

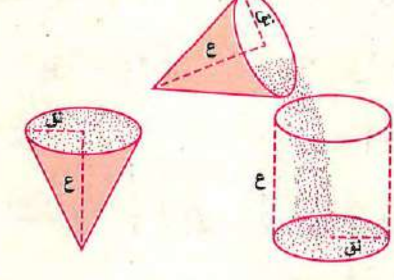
∴ المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق

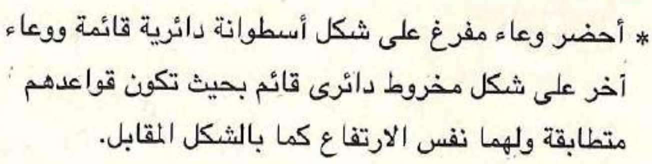
، ∵ المساحة الكلية للمخروط القائم = المساحة الجانبية له + مساحة قاعدته = π ل نق + π نق^2

∴ المساحة الكلية للمخروط القائم = π نق (ل + نق)

استنتاج حجم المخروط القائم

تجربة عملية





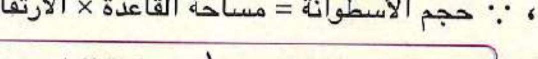
* أحضر وعاء مفرغ على شكل أسطوانة دائرية قائمة ووعاء آخر على شكل مخروط دائرى قائم بحيث تكون قواعدهم متطابقة ولهما نفس الارتفاع كما بالشكل المقابل.

* املأ الوعاء المخروطى بحبات الأرز أو الرمل ثم قم بتفريغ ما به فى الأسطوانة.

* لاحظ أنه بتكرار هذه العملية ثلاث مرات فإن الأسطوانة سوف تمتلئ تمامًا بحبات الأرز أو الرمل.

وهذا يعنى أن حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة المتحدة معه فى القاعدة والارتفاع

، ∵ حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع



∴ حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

مثال ٣

مخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم

أوجد : ١ مساحته الجانبية. ٢ مساحته الكلية. ٣ حجمه.

الحـــل

∵ $\overline{\text{أم}}$ ⊥ مستوى الدائرة ∴ $\overline{\text{أم}} \perp \overline{\text{مب}}$

∴ Δ م أ ب قائم الزاوية فى م ، ∵ نق = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦ سم

∴ أب = $\sqrt{(٨)^٢ + (٦)^٢}$ = ١٠ سم ∴ ل = ١٠ سم

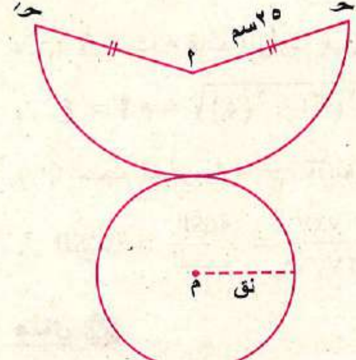
∴ المساحة الجانبية = π نق ل = π × ٦ × ١٠ = ٦٠ π سم^٢

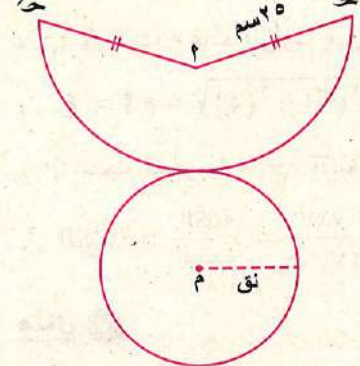
، مساحة القاعدة = π نق^٢ = ٣٦ π سم^٢ ∴ المساحة الكلية = ٦٠ π + ٣٦ π = ٩٦ π سم^٢

، حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = $\frac{١}{٣}$ × π × ٣٦ × ٨ = ٩٦ π سم^٣



مثال ٤





باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم

وإذا كان طول القوس $\overset{\frown}{\text{حح}}$ = ٣٠ π سم

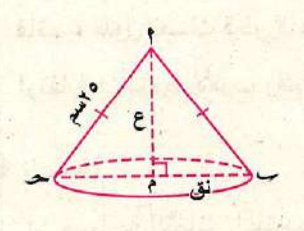
أوجد حجم المجسم ومساحته الكلية.

الحـــل

الشبكة لمخروط قائم

، ∵ طول $\overset{\frown}{\text{حح}}$ = ٣٠ π

∴ ٢ π نق = ٣٠ π ∴ نق = ١٥ سم



، ∵ Δ أ ب م قائم الزاوية فى م

∴ ع = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (١٥)^٢}$ = ٢٠ سم

∴ الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × π × (١٥)^٢ × ٢٠ = ١٥٠٠ π سم^٣

، المساحة الكلية = π نق (ل + نق) = π × ١٥ × (٢٥ + ١٥) = ٦٠٠ π سم^٢



مثال ٥

دورق مخروطى الشكل سعته ٦,١٦ لتر ، ارتفاعه ٣٠ سم

أوجد طول نصف قطر قاعدته. (π ≃ $\frac{٢٢}{٧}$)

الحـــل

تذكر أن ١ لتر = ١٠٠٠ ملليتر = ١٠٠٠ سم^3 = ١ ديسم^3

∵ سعة الدورق = ٦,١٦ لتر

∴ حجم المخروط القائم = ٦,١٦ × ١٠٠٠ سم^3

∴ $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times$ نق^2 × ٣٠ = ٦١٦٠ ∴ نق = ١٤ سم

مثال ٦

سبيكة من الذهب الخالص على هيئة مخروط قائم طول نصف قطر دائرته = ٣ سم ومساحته الجانبية = ١٥ π سم^2 أوجد كثافة الذهب إذا كانت كتلة السبيكة = ٧٢٧ جم (π = ٣,١٤)

الحـــل

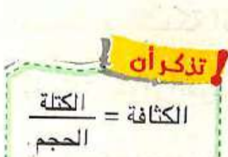
∵ المساحة الجانبية للمخروط = ١٥ π

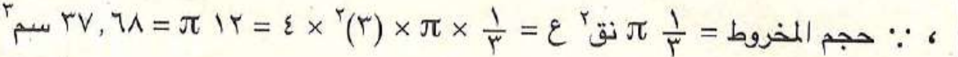
∴ π ل نق = ١٥ π ∴ π × ل × ٣ = ١٥ π

∴ ل = ٥ سم

، ∵ Δ أ ب م قائم الزاوية فى م

∴ ع = أ م = $\sqrt{(5)^2 - (3)^2}$ = ٤ سم





، ∵ حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع = $\frac{1}{3} \times \pi \times (3)^2 \times 4$ = ١٢ π = ٣٧,٦٨ سم^3

∴ الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}} = \frac{727}{37,68} \simeq$ ١٩,٣ جم/سم^3

مثال ٧

هرم ثمانى منتظم من الفضة ، طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٣٠ سم صُهر وحول إلى مخروط دائرى قائم ، طول نصف قطر قاعدته ٩ سم فإذا علم أن ١٠٪ من الفضة فُقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل ، أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشرى واحد.

الحـــل

تذكر أن مساحة مضلع منتظم عدد أضلاعه = ن وطول ضلعه س تساوى $\frac{ن}{4}$ س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

∵ مساحة الثمانى المنتظم = $\frac{8}{4}$ س^2 ظتا $\frac{\pi}{8}$

= ٢ × (٦)^2 ظتا ٣٠َ ٢٢°

≃ ١٧٣,٨٢ سم^2

∴ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ × ١٧٣,٨٢ × ٣٠ = ١٧٣٨,٢ سم^3

∴ حجم الفضة في المخروط = $\frac{90}{100}$ × ١٧٣٨,٢ ≃ ١٥٦٤,٤ سم^3

∴ $\frac{1}{3}\pi \times (9)^2$ × ع ≃ ١٥٦٤,٤ ∴ ع ≃ ١٨,٤ سم

مثال ٨

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ فيه : أ ب = ١٥ متر ، أ حـ = ٢٠ متر فإذا دار المثلث دورة كاملة حول $\overline{\text{ب حـ}}$ صف المجسم الناتج ثم أوجد تكاليف طلاء هذا المجسم بمادة مقاومة لعوامل التعرية علمًا بأن تكاليف المتر المربع الواحد = ١٠ جنيهات ثم أوجد حجم هذا المجسم. $\left(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}\right)$

الحل

* المجسم يكون على هيئة مخروطين قائمين لهما قاعدة مشتركة.

* من هندسة الشكل : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ

، $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

$\therefore$ ب حـ = $\sqrt{(١٥)^٢ + (٢٠)^٢}$ = ٢٥ متر

، أ د = $\frac{١٥ \times ٢٠}{٢٥}$ = ١٢ متر

، ب د = $\sqrt{(١٥)^٢ - (١٢)^٢}$ = ٩ متر ، حـ د = ٢٥ − ٩ = ١٦ متر

بالنسبة للمخروط الأول الذى رأسه ب :

ل = ١٥ متر ، نق = ١٢ متر ، ع = ٩ متر

$\therefore$ المساحة الجانبية = π ل نق = π × ١٥ × ١٢ = ١٨٠ π متر مربع

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = $\frac{١}{٣}$ π × $(١٢)^٢$ × ٩ = ٤٣٢ π متر مكعب

بالنسبة للمخروط الثانى الذى رأسه حـ :

ل = ٢٠ متر ، نق = ١٢ متر ، ع = ١٦ متر

$\therefore$ المساحة الجانبية = π ل نق = π × ٢٠ × ١٢ = ٢٤٠ π متر مربع

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = $\frac{١}{٣}$ π × $(١٢)^٢$ × ١٦ = ٧٦٨ π متر مكعب

$\therefore$ المساحة الكلية التى سوف تُطلى = مجموع المساحتين الجانبيتين للمخروطين

= ١٨٠ π + ٢٤٠ π = ٤٢٠ π = ٤٢٠ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ١٣٢٠ متر مربع

$\therefore$ تكلفة الطلاء = ١٣٢٠ × ١٠ = ١٣٢٠٠ جنيه

، حجم المجسم = مجموع حجمى المخروطين = ٤٣٢ π + ٧٦٨ π = ١٢٠٠ π

= ١٢٠٠ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٣٧٧١ $\frac{٣}{٧}$ متر مكعب.



تمارين 8 على المخروط

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المخروط الدائرى القائم يمكن الحصول عليه عند طى ورقة على شكل ....

(أ) مثلث متساوى الأضلاع. (ب) مثلث قائم الزاوية.

(جـ) قطعة دائرية. (د) قطاع دائرى.

(٢) أقل زاوية يمكن أن يدورها مثلث متساوى الساقين حول محور تماثله لينتج مخروط دائرى قائم هى ....

(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ٢٧٠° (د) ٦٠°

(٣) المخروط الدائرى القائم ينشأ من دوران مثلث قائم دورة كاملة حول ....

(أ) وتره. (ب) أحد ضلعى القائمة.

(جـ) أى مستقيم فى مستوى المثلث.

(د) مستقيم يمر بأحد رؤوسه ويوازى الضلع المقابل للرأس.

(٤) إذا قطع المخروط الدائرى القائم بمستوى يوازى قاعدته فالمقطع الناتج هو ....

(أ) مثلث متساوى الساقين. (ب) مثلث متساوى الأضلاع.

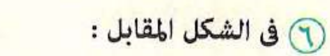
(جـ) دائرة. (د) شبه منحرف.

(٥) 📖 المساحة الكلية (السطحية) للمخروط القائم تساوى ....

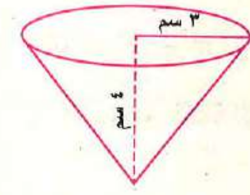
(أ) π نق ل (ب) $\frac{\pi}{3}$ نق^2 ع

(جـ) π نق (نق + ل) (د) $\frac{\pi}{3}$ نق (نق ع + ٣ ل)

(٦) فى الشكل المقابل :



طول راسم المخروط = ... سم.



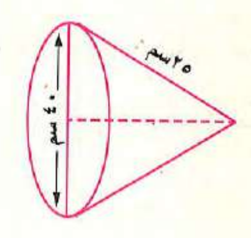
(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

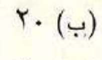
(٧) فى الشكل المقابل :



ارتفاع المخروط = ... سم.



(أ) ١٥ (ب) ٢٠



(جـ) ٢٥ (د) ٤٠

(٨) طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٥ سم ، وطول راسمه ١٧ سم يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٩

(٩) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^٢

(أ) ٣٧٥ π (ب) ٦٠٠ π (جـ) ١٥٠٠ π (د) ١٨٧٥ π

(١٠) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ء = ٣ سم ، أ ب = ٥ سم

فإن المساحة الكلية للمخروط = ... سم^٢.

(أ) ٨ π (ب) ٢٤ π (جـ) ٤٨ π (د) ٣٦ π

(١١) إذا كان طول قطر قاعدة مخروط قائم ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم ، فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم^٢.

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

(١٢) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٦ سم ومحيط قاعدته ١٦ π سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^٢

(أ) ١٤٤ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٦٠ π (د) ٨٠ π

(١٣) مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية تساوى .... سم^٢

(أ) ٣ π نق^٢ (ب) ٣ π نق^٣ (جـ) ٤ π نق^٢ (د) ٤ π نق^٣

(١٤) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم فإن مساحة قاعدته .... سم^٢

(أ) ٢٥ π (ب) ١٠٠ π (جـ) ٢٠ π (د) ٥٠ π

(١٥) طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم^٢ وطول راسمه ٣٠ سم هو .... سم.

(أ) ٤٤ (ب) ١٤ (جـ) ٣٠ (د) ٣٤

(١٦) غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته الجانبية ≃ .... سم^٢. ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ٨٨ (ب) ٥٩٦ (جـ) ١٠٧٤ (د) ١٠٤٧

(١٧) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وطول راسمه ١٠سم فإن حجمه = ... سم^٣

(أ) ٣٢ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٩٦ π (د) ٢٨٨ π

(١٨) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ سم وطول راسمه ٥ سم يكون حجمه .... سم^٣.

(أ) ٣٦ π (ب) ١٥ π (جـ) ٢٤ π (د) ١٢ π

(١٩) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه (ل) دار دورة كاملة حول ب حـ كمحور للدوران فإن حجم الجسم الناشئ من الدوران بدلالة π ، ل هو ....

(أ) $\frac{\pi ل}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٤} ل^٢$ (جـ) $\frac{\pi ل^٣}{٤}$ (د) $\sqrt{٣} \pi ل^٢$

(٢٠) مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم فإن ارتفاعه يساوى .... سم.

(أ) ٢٧ (ب) ١٨ (جـ) ٩ (د) ٦

(٢١) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية = ٩٠ π سم^٢. فإن حجمه = ... سم^٣.

(أ) ١٠٥ π (ب) ٩٥ π (جـ) ١٠٠ π (د) ١٢٠ π

(٢٢) حجم مخروط قائم طول راسمه = ١٥ سم ومساحته الكلية = ٢١٦ π سم^٢ يساوى .... سم^٣.

(أ) ٢٠٥ π (ب) ٢٢٠ π (جـ) ٢٨٠ π (د) ٣٢٤ π

(٢٣) مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم ومساحته الجانبية ٥٥٠ سم^٢. فإن حجمه = ... سم^٣ حيث $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) ١٢٢٣ (ب) ١٢٣٢ (جـ) ١٣٢٢ (د) ٣١٢٢

(٢٤) مخروط دائرى قائم حجمه ٩ π سم^٣ ، وطول نصف قطر قاعدته يساوى ارتفاعه فتكون مساحة قاعدته = ... سم^٢.

(أ) ٩ π (ب) ٣ π (جـ) ٢٧ π (د) ١٢ π

(٢٥) مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠ سم^٣ فإن حجمه عندما يتضاعف طول نصف قطر قاعدته = ... سم^٣.

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٤٠٠

(٢٦) مخروط دائرى قائم إذا زاد طول نصف قطر قاعدته للضعف ، وقل ارتفاعه للنصف فإن حجمه ....

(أ) يظل كما هو. (ب) يزداد للضعف.

(جـ) يقل للنصف. (د) يزداد لأربعة أمثال.

(٢٧) مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته = ضعف طول ارتفاعه = ٦ سم وهرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = طول ارتفاعه = ٦ سم فإن نسبة حجم المخروط : حجم الهرم = ...

(أ) ٣ : π (ب) π : ٣ (جـ) π : ٢ (د) ٢ : π

(٢٨) فى الشكل المقابل :

$\frac{\text{حجم المخروط}}{\text{حجم الأسطوانة}}$ = ...

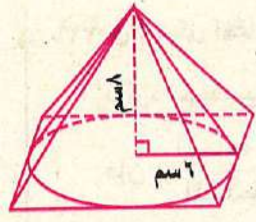
ع

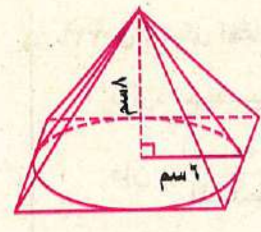
نق

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{١}$

(٢٩) فى الشكل المقابل :





هرم قائم منتظم ومخروط دائرى قائم مشتركان فى الرأس

وقاعدة المخروط سطح دائرة تمس أضلاع قاعدة الهرم من الداخل

أولاً : المساحة الجانبية للمخروط القائم تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٦٠ (ب) ٦٠ π (جـ) ٤٨ (د) ٤٨ π

ثانيًا : المساحة الكلية للهرم المنتظم تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٣٦٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٣٨٤ (د) ٤٣٢

ثالثًا : حجم الهرم يساوى .... سم^{٣}

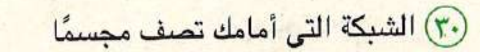
(أ) ٦٤ (ب) ٩٦ (جـ) ٤٨٠ (د) ٣٨٤

رابعًا : النسبة بين حجم الهرم إلى حجم المخروط تساوى ....

(أ) π : ٣ (ب) ٤ : π (جـ) π : ٤ (د) ٣ : π

خامسًا : النسبة بين المساحة الجانبية للهرم إلى المساحة الجانبية للمخروط تساوى ....

(أ) π : ٣ (ب) ٤ : π (جـ) π : ٤ (د) ٣ : π



(٣٠) الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا

حجمه = ... سم^{٣}

(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π

(جـ) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

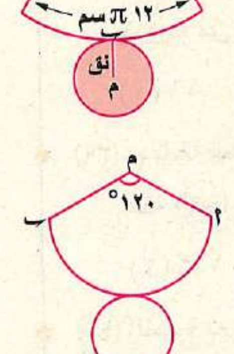
(٣١) الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^{٣}

فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π

(جـ) ٤٨ π (د) ٩٦ π

(٣٢) الشكل المقابل يمثل شبكة لمجسم فيه : م ب = ٣ π سم



، ق (∠ أ م ب) = ١٢٠° فإن حجم المجسم = ... سم^{٣}

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ $\pi^{٢}$ (ب) $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}\pi^{٤}$

(جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ π (د) $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}\pi^{٣}$

(٣٣) في الشكل المقابل :

دائرة تم تقسيمها إلى قطاعين دائريين بحيث تكون شبكتى مخروطين قائمين

فإن : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...

م

$\frac{٢\pi}{٣}$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

(٣٤) في الشكل المقابل :

إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

٢٠ سم

(أ) ١٠ (ب) ٨

(جـ) ٥ (د) ٢,٥

(٣٥) في الشكل المقابل :

إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

ل سم

(أ) $\frac{ل}{٢}$ (ب) $\frac{ل}{٣}$

(جـ) $\frac{ل}{٤}$ (د) $\frac{ل}{٥}$

(٣٦) الزاوية المركزية للقطاع الذى إذا طويناه

أصبح المخروط الموضح تكون ....

١٣ سم

١٢ سم

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

(٣٧) القطاع الدائرى الذى إذا طويناه أصبح مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٠ سم وطول نصف قطر قاعدته ٥ سم فإن الزاوية المركزية لهذا القطاع تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

(٣٨) إذا كان لدينا ربع دائرة طول نصف قطرها ١٦ سم فإن طول نصف قطر قاعدة المخروط الذى يمكن تكوينه من قوس ربع الدائرة = ... سم.

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

(٣٩) مساحة قطاع دائرى : المساحة الكلية للمخروط الدائرى المصمت الذى يمكن تكوينه من طى هذا القطاع ....

(أ) < ١ (ب) > ١ (جـ) $= ١$ (د) ≤ ١

(٤٠) النسبة بين حجم هرم رباعى منتظم وحجم أصغر مخروط دائرى يحتويه تساوى ....

(أ) $٢ : \pi$ (ب) $٤ : \pi$ (جـ) $٦ : \pi$ (د) $٨ : \pi$

(٤١) في الشكل المقابل :

إذا كان : أب = ٣ سم ، ب ء = ء حـ = ١ سم

، ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° فإن حجم الجسم الناشئ

من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول المحور $\overleftrightarrow{أب}$ يساوى ....

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٣ π (د) ٤ π

(٤٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : ظا هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ، أب = ٢٦ سم

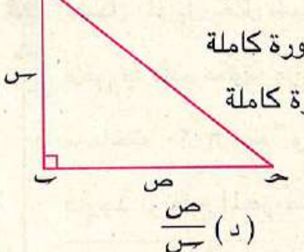
فإن المساحة الجانبية للجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب و

دورة كاملة حول محور السينات = ... π سم^{٢}.

(أ) ٣٦٠   (ب) ٢٦٠ π

(جـ) ٢٦٠   (د) ٣٦٠ π

(٤٣) في الشكل المقابل :



إذا كان $ح_١$ هو حجم المخروط الناشىء من دوران المثلث أ ب حـ حول $\overleftrightarrow{أب}$ دورة كاملة

، $ح_٢$ هو حجم المخروط الناشىء من دوران المثلث أ ب حـ حول $\overleftrightarrow{ب حـ}$ دورة كاملة

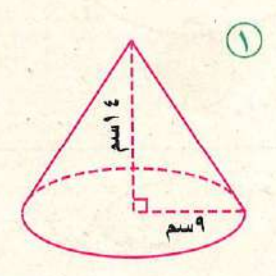
فإن : $\frac{ح_١}{ح_٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{س}{ص}$ (د) $\frac{ص}{س}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

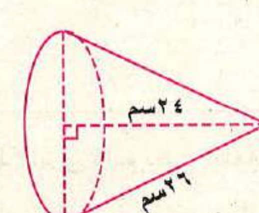
١ أوجد حجم المخروط القائم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاة :

①

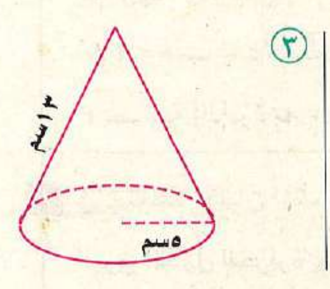


②



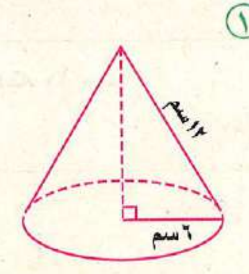


③

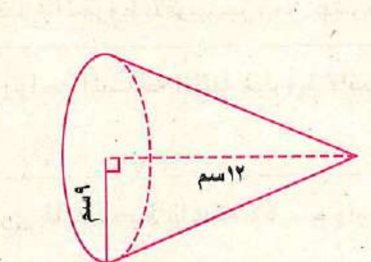


٢ أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل مخروط قائم حسب البيانات المعطاة :

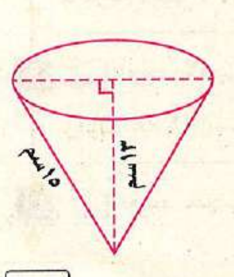
①



②



③



٣ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم **أوجد :**

(١) مساحته الجانبية. (٢) مساحته الكلية. (٣) حجمه.

«١٣٦ π سم^2 ، ٢٠٠ π سم^2 ، ٣٢٠ π سم^3»

---

٤ أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم ، وطول راسمه ٢٦ سم

«٢٠ π سم ، ١٠٠ π سم^2»

---

٥ يوضح الشكل المقابل

شبكة مخروط قائم

، مستعينًا بالبيانات المعطاة

، أوجد ارتفاعه. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

«١٤ $\sqrt{٢}$ سم»

---

٦ الشكل المقابل يمثل شبكة لمجسم

مخروط قائم مكونة من قطاع دائرى

مساحته ٢٠ π سم^2 وطول قوسه $\overset{\frown}{أ حـ ب}$ = ٨ π سم

فأوجد ارتفاع المخروط.

«٣ سم»

---

٧ الشكل المقابل يمثل شبكة لمجسم

صف المجسم الناتج من الطى

ثم أوجد ارتفاعه إذا علمت أن :

م أ = م ب = ٢٥ سم

، مساحة الدائرة ن = ٤٩ π سم^2

«٢٤ سم»

---

٨ تغلف الألبان المثلجة فى مخروط دائرى قائم بطى قطعة من الورق العازل للحرارة على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢ سم ومساحته ١٥٠ سم^2 بحيث يتلامس نصفا قطرى دائرته $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ أوجد ارتفاع المخروط لأقرب جزء من عشرة.

«١١,٣ سم»

---

٩ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد المساحة الكلية لمخروط قائم طول قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

«٢٨٢,٧ سم^2»

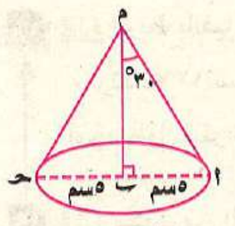
---

١٠ أوجد حجم مخروط دائرى قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ٢٥ سم

«١٢٨٣,٨ سم^3»



١١ في الشكل المقابل :



مخروط دائرى قائم فيه :

ق (∠ أ م ب) = ٣٠° ، طول نصف قطر القاعدة = ٥ سم

احسب مساحته الجانبية والكلية.

«٥٠ π سم^٢ ، ٧٥ π سم^٢»

---

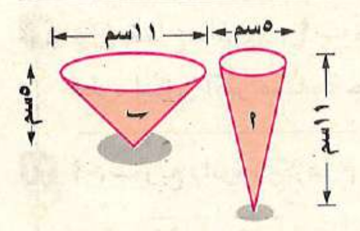
١٢ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر دائرته ٨ سم ومساحته الجانبية = ٩٦ π سم^٢

أوجد لأقرب رقم عشرى واحد حجم هذا المخروط.

«٥٩٩,٥ سم^٣»

---

١٣ في الشكل المقابل :



أ ، ب كأسان للشراب

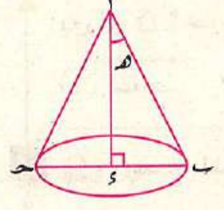
أيهما سعته أكبر ؟

أوجد الفرق بين سعتيهما.

«ب الأكبر ، $\frac{٥٥}{٢}$ π سم^٢»

---

١٤ في الشكل المقابل :



إذا كان : جا هـ = $\frac{٣}{٥}$

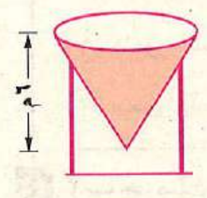
، ارتفاع المخروط = ١٢ سم

أوجد المساحة الكلية للمخروط.

«٢١٦ π سم^٢»

---

١٥ هندسة مدنية :



صهريج مياه على شكل مخروط قائم

، حجمه ٣٢ π م^٣ وارتفاعه ٦ م

أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية.

«٤ م ، (١٦ + ٨√١٣) π م^٢»

---

١٦ أيهما أكبر حجمًا ؟ مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم ، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠ سم ومحيط قاعدته ٤٨ سم.

---

١٧ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ع وحجمه π ع^٣ برهن أن مساحته الجانبية تساوى مساحة السطح الجانبى للأسطوانة القائمة المتحدة معه فى القاعدة والارتفاع.

١٨ **الربط بالفيزياء :** إناء أسطوانى الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمرًا كاملًا ، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١ سم. أوجد طول قطر قاعدة الإناء. «٨ سم»

١٩ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحوِّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١ سم ، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «٨ $\sqrt{٥}$ سم»

٢٠ دورق مخروطى الشكل سعته ٢,٢ لتر وارتفاعه ٢١ سم أوجد طول نصف قطر قاعدته. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «١٠ سم»

٢١ قطاع دائرى م ؟ ب طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم هذا المخروط. «١٦٧,٣ سم^٣»

٢٢ ؟ م ب ربع دائرة مركزها م ونصف قطرها ٢٠ سم حولت إلى سطح مخروطى دائرى قائم رأسه (م) بحيث انطبق $\overline{م؟}$ على $\overline{مب}$ أوجد نصف قطر قاعدة المخروط وكذا حجمه بدلالة π. «٥ سم ، $\frac{١٢٥\sqrt{١٥}}{٣}\pi$ سم^٣»

٢٣ ؟ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : ؟ ب = ٦ سم ، ب ح = ٨ سم أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران Δ ؟ ب ح دورة كاملة حول :

(١) $\overleftrightarrow{بح}$ (٢) $\overleftrightarrow{؟ح}$ «٩٦ π سم^٣ ، ٧٦,٨ π سم^٣»

٢٤ يوضح الشكل المقابل مستوى إحداثى متعامد ، احسب بدلالة π حجم الجسم الناشئ عند دوران المثلث ؟ ب و ، دورة كاملة حول :

(١) محور السينات.

(٢) محور الصادات.

«١٢ π وحدة مكعبة ، ١٦ π وحدة مكعبة»

٢٥ ؟ ب ح مثلث متساوى الساقين فيه : ؟ ب = ؟ ح = ١٠ سم ، ب ح = ١٢ سم دار دورة كاملة حول قاعدته $\overline{بح}$ احسب حجم الجسم الناشئ من الدوران. «٢٥٦ π سم^٣»

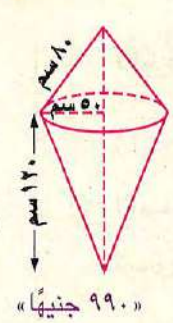
٢٦ فى الشكل المقابل :

أوجد المساحة الجانبية والكلية والحجم للمخروط الدائرى القائم.



«١٠٨ π سم^٢ ، ١٤٤ π سم^٢ ، ١٤٤ $\sqrt{٢}$ π سم^٣»

٢٧ ملاحة بحرية :



يوضح الشكل المقابل علامة إرشادية (شمندورة) لتحديد المجرى الملاحى ، وهى على هيئة مخروطين قائمين لهما قاعدة مشتركة. أوجد تكاليف طلائه بمادة مقاومة لعوامل التعرية ، علمًا بأن تكاليف المتر المربع الواحد منها ٣٠٠ جنيه.

« ٩٩٠ جنيهًا »

---

٢٨ **الربط بالصناعة :** هرم خماسى منتظم من النحاس، طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاعه ٤٢ سم ، صهر وحول إلى مخروط دائرى قائم ، طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم فإذا علم أن ١٠ ٪ من النحاس فُقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل ، أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشرى واحد. «٩,٢ سم»

---

٢٩ **تفكير إبداعى :** مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠ سم^3 أوجد حجمه عندما :

(١) يتضاعف ارتفاعه. (٢) يتضاعف طول نصف قطره.

(٣) يتضاعف ارتفاعه وطول نصف قطره. ماذا تستنتج ؟ فسر إجابتك. «٢٠٠ سم^3 ، ٤٠٠ سم^3 ، ٨٠٠ سم^3»

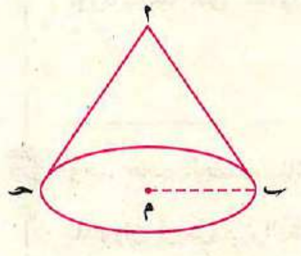
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها (نق) يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) فإن : ....

(أ) ع = $\frac{٢}{٣}$ نق (ب) ع = ٢ نق (جـ) ع = ٢ نق^2 (د) ع = ٤ نق

(٢) فى الشكل المقابل :



مخروط دائرى قائم حجمه ٩٦ π سم^3 وكان : $\frac{م ب}{أ ب} = \frac{٣}{٥}$

فإن المساحة الكلية = ... سم^2

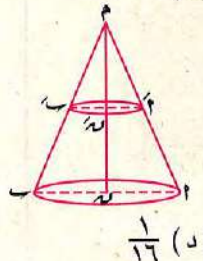
(أ) ٢٤ π (ب) ٤٨ π

(جـ) ٩٦ π (د) ١٩٢ π

(٣) طول قوس القطاع الدائرى الذى إذا طويناه أصبح مخروطًا دائريًا قائمًا حجمه ٤٩ π سم^3 وارتفاعه ٣ سم يساوى .... سم

(أ) ٢ π (ب) ٤ π (جـ) ٨ π (د) ١٤ π

(٤) فى الشكل المقابل :



إذا رسم مستوى عمودى على محور المخروط قطعه فى منتصف $\overline{م ن}$ فإن :

أولًا : $\frac{\text{حجم المخروط الأصغر}}{\text{حجم المخروط الأكبر}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

ثانيًا : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

⑤ **النسبة بين حجم هرم ثلاثى منتظم وحجم أكبر مخروط دائرى قائم يمكن وضعه بداخل الهرم**

تساوى ....

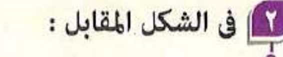
(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢\pi}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{\pi}$ (د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

⑥ **النسبة بين حجم هرم ثلاثى منتظم وحجم أصغر مخروط دائرى قائم يحتويه تساوى** ....

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢\pi}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{\pi}$ (د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

⑦ مخروط دائرى قائم حجمه (ح) ، **إذا زاد طول نصف قطر قاعدته بنسبة ٥٠٪ ، وزاد ارتفاعه بنسبة** ٥٠٪ وكان حجمه بعد الزيادة (حَ) فإن : ....

(أ) حَ = ١٥٠٪ ح (ب) حَ = ٢٢٥٪ ح (جـ) حَ = ٣٣٧,٥٪ ح (د) حَ = ٤٥٠٪ ح



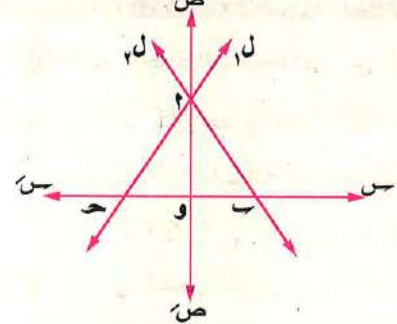
٢ في الشكل المقابل :

معادلة المستقيم ل١ هى : ٣ س − $\sqrt{٣}$ ص + ٦ = ٠

ومعادلة المستقيم ل٢ هى : $\sqrt{٣}$ س + ص − ٢ $\sqrt{٣}$ = ٠

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب حـ

دورة كاملة حول محور السينات.

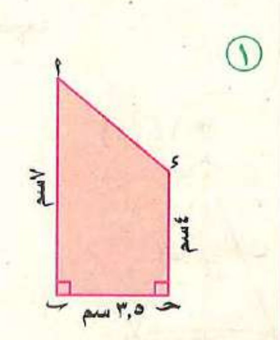


«١٦ π وحدة مكعبة»

---

٣ أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المساحة المظللة دورة كاملة حول $\overline{أب}$ كمحور للدوران فى كل من الأشكال التالية :

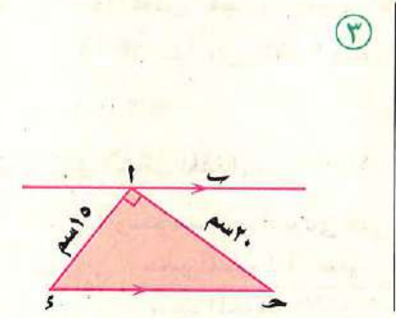
①



②

حـ ٣ ٣ ب ٨سم أ

③



«١٩٢,٤ ، ٢٢٦,٢ ، ٧٥٣٩,٨ سم٣»



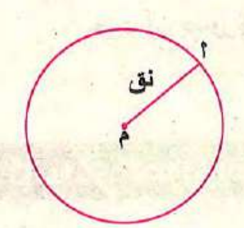
الدرس

4

الـــــدائـــــرة

تعريف الدائرة

هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على بُعد ثابت من نقطة ثابتة فى المستوى.



* تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة (م)
* يسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة (نق)
* نرمز للدائرة بالرمز (د) حيث د = {أ : م أ = نق ، نق > ٠}

أولًا معادلة الدائرة (بدلالة إحداثيى مركزها وطول نصف قطرها)



إذا كانت أ = (س ، ص) نقطة ما على الدائرة التى

مركزها النقطة م (ء ، هـ) وطول نصف قطرها = نق

فى مستوى إحداثى متعامد

وباستخدام قانون البعد بين نقطتين نجد أن :

$\sqrt{(س - ء)^{٢} + (ص - هـ)^{٢}}$ = نق

أى أن $(س - ء)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$ «معادلة الدائرة»

ملاحظـات

١ إذا كان مركز الدائرة هو نقطة الأصل (٠ ، ٠)

فإن معادلة الدائرة هى : $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$

٢ وضع النقطة $(س_١ ، ص_١)$ بالنسبة للدائرة د : $(س - ء)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

* إذا كان : $(س_١ - ء)^٢ + (ص_١ - هـ)^٢ = نق^٢$ فإن النقطة تقع على الدائرة.

* إذا كان : $(س_١ - ء)^٢ + (ص_١ - هـ)^٢ > نق^٢$ فإن النقطة تقع خارج الدائرة.

* إذا كان : $(س_١ - ء)^٢ + (ص_١ - هـ)^٢ < نق^٢$ فإن النقطة تقع داخل الدائرة.

٣ تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما.

فمثلًا : إذا كانت معادلة الدائرة $د_١$ هى : $س^٢ + ص^٢ = ٤٩$

، معادلة الدائرة $د_٢$ هى : $(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٤٩$

فإن : $نق_١ = نق_٢ = \sqrt{٤٩} = ٧$ وحدة طولية. أى أن : الدائرتين متطابقتان.

* **ونلاحظ أن** : الدائرة $د_٢$ هى صورة الدائرة $د_١$ بالانتقال (٣ ، ٤)

حيث إن صورة النقطة (س ، ص) بالانتقال (أ ، ب) هى : (س + أ ، ص + ب)

ثانيًا الصورة العامة لمعادلة الدائرة

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى :

$$س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠$$

حيث المركز (م) = (- ل ، - ك) = $(-\frac{١}{٢}$ معامل س ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ص$)$

، $نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - حـ}$ ، $ل^٢ + ك^٢ - حـ > ٠$

فمثلًا :

الدائرة التى معادلتها هى : $س^٢ + ص^٢ + ٨ س - ٤ ص - ١٦ = ٠$

يكون مركزها = $(-\frac{١}{٢}$ معامل س ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ص$)$ = (-٤ ، ٢)

، $نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - حـ} = \sqrt{١٦ + ٤ - (-١٦)} = ٦$ وحدة طولية.

*** يمكن استنتاج الصورة العامة لمعادلة الدائرة كما يلى :**

نعلم أن معادلة الدائرة التى مركزها (ء ، هـ) ، طول نصف قطرها = نق هى : $(س - ء)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

أى أن $س^2 + ص^2 - 2 ء س - 2 هـ ص + ء^2 + هـ^2 - نق^2 = 0$

وبوضع م = (ء ، هـ) = (-ل ، -ك)

$\therefore س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص + ل^2 + ك^2 - نق^2 = 0$

، $\because$ ل ، ك ، نق ثوابت $\therefore ل^2 + ك^2 - نق^2 = جـ$ (ثابت)

$\therefore$ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى : $س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص + جـ = 0$

ملاحظات

1. الصورة العامة لمعادلة الدائرة : $س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص + جـ = 0$ تتصف بالآتى :
   - * معادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص
   - * خالية من الحد المشتمل على س ص **أى أن** معامل س ص = 0
   - * معامل $س^2$ = معامل $ص^2 = 1$
2. لكى تمثل معادلة الدرجة الثانية فى س ، ص دائرة حقيقية يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة وأن يكون : $ل^2 + ك^2 - جـ > 0$.
3. عند تعيين مركز أو طول نصف قطر دائرة من معادلتها العامة يجب أن يكون معامل $س^2$ = معامل $ص^2 = 1$ لذلك يلزم أولًا القسمة على هذا المعامل إذا كان خلاف الوحدة.

حالات خاصة

1 معادلة الدائرة المارة بنقطة الأصل هى :

$س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص = 0$ المعادلة خالية من الحد المطلق أى (جـ = 0)

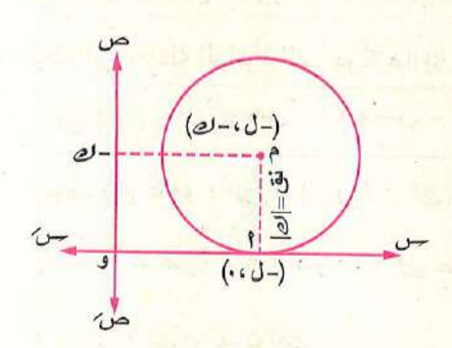
2 معادلة الدائرة التى مركزها يقع على محور السينات هى :

$س^2 + ص^2 + 2 ل س + جـ = 0$ المعادلة خالية من الحد المشتمل على ص أى (ك = 0)

3 معادلة الدائرة التى مركزها يقع على محور الصادات هى :

$س^2 + ص^2 + 2 ك ص + جـ = 0$ المعادلة خالية من الحد المشتمل على س أى (ل = 0)

٤ معادلة الدائرة التى تمس محور السينات :



إذا مست الدائرة التى مركزها (– ل ، – ك)

محور السينات فإن :

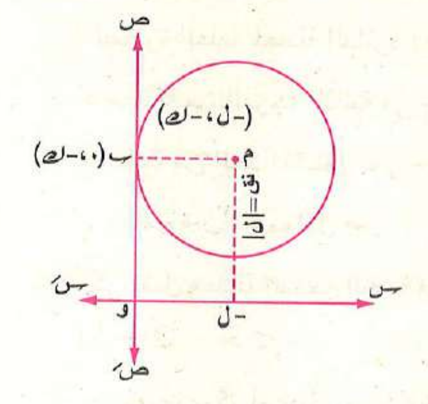
نقطة التماس أ هى : (– ل ، ٠)

ويكون نق = | ك |

∴ حـ = ل^{٢} + ك^{٢} – نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} – ك^{٢} = ل^{٢}

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^{٢} = ٠

٥ معادلة الدائرة التى تمس محور الصادات :



إذا مست الدائرة التى مركزها (– ل ، – ك)

محور الصادات فإن :

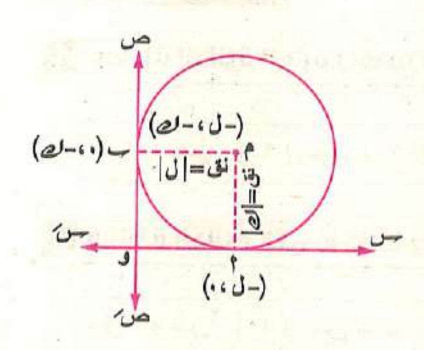
نقطة التماس ب هى : (٠ ، – ك)

ويكون نق = | ل |

∴ حـ = ل^{٢} + ك^{٢} – نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} – ل^{٢} = ك^{٢}

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ك^{٢} = ٠

٦ معادلة الدائرة التى تمس المحورين :



إذا مست الدائرة التى مركزها (– ل ، – ك) المحورين

فإن : نق = | ل | = | ك |

∴ حـ = ل^{٢} + ك^{٢} – نق^{٢} = نق^{٢} + نق^{٢} – نق^{٢} = نق^{٢}

∴ حـ = ل^{٢} = ك^{٢} = نق^{٢}

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

حيث : | ل | = | ك | = نق ، حـ = ل^{٢} = ك^{٢} = نق^{٢}

تذكر أن

[١] وضع مستقيم ل بالنسبة للدائرة د والتى مركزها (م) وبفرض أن $\overleftarrow{\text{م ح}}$ ⊥ ل ويقطعه فى ح

* إذا كان : م ح < نق فإن : ل قاطع للدائرة فى نقطتين مختلفتين.

* إذا كان : م ح = نق فإن : ل مماس للدائرة.

* إذا كان : م ح > نق فإن : ل خارج الدائرة ولا يقطعها فى أى نقطة.

[٢] إذا كانت م ، ن دائرتين طولا نصفى قطريهما نق_1 ، نق_2 على الترتيب (حيث $\text{نق}_1 > \text{نق}_2$)

إذا كانت الدائرتان م ، ن	فإن
(١) متباعدتين	م ن > $\text{نق}_1 + \text{نق}_2$
(٢) متماستين من الخارج	م ن = $\text{نق}_1 + \text{نق}_2$
(٣) متقاطعتين	$\text{نق}_1 - \text{نق}_2$ < م ن < $\text{نق}_1 + \text{نق}_2$
(٤) متماستين من الداخل	م ن = $\text{نق}_1 - \text{نق}_2$
(٥) متداخلتين	م ن < $\text{نق}_1 - \text{نق}_2$
(٦) متحدتى المركز	م ن = صفر

[٣] المماس للدائرة يكون عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

[٤] المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها متوازيان.

[٥] القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان فى الطول.

[٦] إذا كانت : أ = $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب = $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

فإن : نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ = $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right)$

[٧] معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ وميله = م هى : $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \text{م}$

[٨] طول العمود المرسوم من النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ على المستقيم الذى معادلته :

أ س + ب ص + ح = ٠ يساوى $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{ح}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$

مثال ١

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها النقطة (−٢ ، ٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات طولية.

الحل

معادلة الدائرة هى : $(س + ٢)^٢ + (ص − ٣)^٢ = (٥)^٢$

أى : $س^٢ + ص^٢ + ٤ س − ٦ ص − ١٢ = ٠$ «بعد الفك والتبسيط».

حل آخر :

∵ ل = ٢ ، ك = −٣ ، حـ = $ل^٢ + ك^٢ − نق^٢ = (٢)^٢ + (−٣)^٢ − (٥)^٢ = −١٢$

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى :

$س^٢ + ص^٢ + ٤ س − ٦ ص − ١٢ = ٠$ «وهى نفس الصورة التى حصلنا عليها سابقًا»

مثال ٢

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول قطرها $٦\sqrt{٢}$ وحدة طولية
ثم أثبت أنها تمر بالنقطة $(\sqrt{٢} ، −٤)$.

الحل

معادلة الدائرة هى : $س^٢ + ص^٢ = (٣\sqrt{٢})^٢$ أى : $س^٢ + ص^٢ = ١٨$

وبالتعويض بالنقطة $(\sqrt{٢} ، −٤)$ فى الطرف الأيمن للمعادلة

∴ $(\sqrt{٢})^٢ + (−٤)^٢ = ١٨$ = الطرف الأيسر ∴ النقطة $(\sqrt{٢} ، −٤) \in$ الدائرة.

مثال ٣

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها م = (٣ ، −٢) وتمر بالنقطة أ = (−١ ، ١)

الحل

نق = م أ = $\sqrt{(٣ + ١)^٢ + (−٢ − ١)^٢}$ = ٥ وحدة طولية

∴ معادلة الدائرة هى : $(س − ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$

مثال ٤

أوجد معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ = (٤ ، −١) ، ب = (−٢ ، ١)

الحل

∵ مركز الدائرة م هو نقطة منتصف $\overline{أب}$ ∴ م = $\left(\frac{٤ − ٢}{٢} ، \frac{−١ + ١}{٢}\right)$ = (١ ، ٠)

، ∵ نق = م أ = $\sqrt{(٤ − ١)^٢ + (−١ − ٠)^٢} = \sqrt{١٠}$ وحدة طولية

∴ معادلة الدائرة هى : $(س − ١)^٢ + (ص − ٠)^٢ = (\sqrt{١٠})^٢$ أى : $(س − ١)^٢ + ص^٢ = ١٠$

مثال ٥

أوجد مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر الآتية :

[١] $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٤ ص - ٤ = ٠$. [٢] $س^٢ + ص^٢ - ٤ ص - ٩ = ٠$.

[٣] $٧ س^٢ + ٧ ص^٢ + ٤٢ س - ١٤ ص + ٢٨ = ٠$.

الحل

[١] ∵ $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٤ ص - ٤ = ٠$ ∴ ل = -١ ، ك = ٢ ، ح = -٤

∴ المركز = (- ل ، - ك) = (١ ، -٢)

، نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ح} = \sqrt{(-١)^٢ + (٢)^٢ - (-٤)} = ٣$ وحدة طولية

[٢] ∵ $س^٢ + ص^٢ - ٤ ص - ٩ = ٠$.

∴ ل = صفر ، ك = -٢ ، ح = -٩

∴ المركز = (- ل ، - ك) = (٠ ، ٢)

، نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ح} = \sqrt{(٠)^٢ + (-٢)^٢ - (-٩)} = \sqrt{١٣}$ وحدة طولية.

لاحظ أن
ل = صفر لأن معامل س = ٠ .

[٣] بالقسمة على ٧ لنجعل معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

∴ تصبح المعادلة على الصورة : $س^٢ + ص^٢ + ٦ س - ٢ ص + ٤ = ٠$.

∴ ل = ٣ ، ك = -١ ، ح = ٤ ∴ المركز = (- ل ، - ك) = (-٣ ، ١)

، نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ح} = \sqrt{(٣)^٢ + (-١)^٢ - ٤} = \sqrt{٦}$ وحدة طولية.

مثال ٦

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، -٤) وتمس محور السينات.

الحل

∵ ل = -٣ ، ك = ٤ ، ∵ الدائرة تمس محور السينات. ∴ نق = | ك | ، ح = $ل^٢$

∴ نق = ٤ وحدة طولية ، ح = ٩ «يمكن حساب ح من العلاقة : ح = $ل^٢ + ك^٢ - نق^٢$»

∴ معادلة الدائرة هى : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص + ٩ = ٠$.

مثال ٧

أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها ٥ وحدات وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣)

الحل

∵ الدائرة تمس محور الصادات عند (٠ ، ٣)

∴ المركز = (- ل ، ٣) ، نق = | ل | وحدة طولية أى أن : | ل | = ٥ ∴ ل = ± ٥ ، ح = $ك^٢$ = ٩

∴ توجد دائرتان إحداهما مركزها (-٥ ، ٣) ومعادلتها : $س^٢ + ص^٢ + ١٠ س - ٦ ص + ٩ = ٠$.

والأخرى مركزها (٥ ، ٣) ومعادلتها : $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ٦ ص + ٩ = ٠$.

مثال ٨

أوجد معادلة الدائرة التى تمس المحورين ومركزها النقطة (−٤ ، ٤)

الحل

∵ الدائرة تمس المحورين ∴ $ح = ل^٢ = ك^٢ = ١٦$

∴ المعادلة هى : $س^٢ + ص^٢ + ٨ س − ٨ ص + ١٦ = ٠$

مثال ٩

بيِّن أى المعادلات الآتية تُعبر عن دائرة :

١ $س^٢ + ٣ ص^٢ − ٢ س + ٤ ص + ٥ = ٠$

٢ $٢ س^٢ − س ص + ٢ ص^٢ + ٥ س − ص − ٢ = ٠$

٣ $س^٢ + ص^٢ + ٧ س − ص + ٨ = ٠$

٤ $٢ س^٢ + ٢ ص^٢ − ٦ س + ٤ ص + ٩ = ٠$

٥ $س^٢ + ص^٢ − ١٦ س + ١٢ ص + ١٠٠ = ٠$

٦ $س^٢ + ٦ س − ٨ ص − ٧ = ٠$

الحل

١ ∵ معامل $س^٢ \ne$ معامل $ص^٢$ ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٢ ∵ المعادلة تشتمل على الحد س ص ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٣ ∵ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ والمعادلة خالية من س ص

∴ المعادلة يمكن أن تعبر عن دائرة

، ∵ $٢ ل = ٧$ ، $٢ ك = −١$ ∴ $ل = \frac{٧}{٢}$ ، $ك = −\frac{١}{٢}$ ، $ح = ٨$

∴ $ل^٢ + ك^٢ − ح = \frac{٤٩}{٤} + \frac{١}{٤} − ٨ = \frac{٩}{٢} > ٠$

∴ المعادلة تعبر عن دائرة مركزها $(−\frac{٧}{٢} ، \frac{١}{٢})$ ، نق $= \sqrt{\frac{٩}{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ وحدة طولية.

٤ ∵ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ والمعادلة خالية من س ص

∴ المعادلة يمكن أن تعبر عن دائرة

وبالضرب فى $\frac{١}{٢}$ لجعل معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢ = ١$

∴ $س^٢ + ص^٢ − ٣ س + ٢ ص + \frac{٩}{٢} = ٠$

∴ $٢ ل = −٣$ ، $٢ ك = ٢$ ∴ $ل = −\frac{٣}{٢}$ ، $ك = ١$ ، $ح = \frac{٩}{٢}$

∴ $ل^٢ + ك^٢ − ح = \frac{٩}{٤} + ١ − \frac{٩}{٢} = −\frac{٥}{٤} < ٠$ ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٥ ∵ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ والمعادلة خالية من س ص

∴ المعادلة يمكن أن تعبر عن دائرة ∴ ٢ ل = −١٦ ، ٢ ك = ١٢

∴ ل = −٨ ، ك = ٦ ، حـ = ١٠٠

∴ $ل^٢ + ك^٢ − حـ$ = ٦٤ + ٣٦ − ١٠٠ = صفر ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٦ ∵ المعادلة خالية من $ص^٢$ ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

مثال ١٠

أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها = ٣ وحدات ومعادلتا مستقيمان يحملان قطرين فيها هما :

س + ص = ٢ ، ٢ س − ص = ٧

الحل

مركز الدائرة هو نقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٢ (١)

، ٢ س − ص = ٧ (٢)

بالجمع : ∴ ٣ س = ٩ ∴ س = ٣

وبالتعويض : ∴ ص = −١ ∴ المركز هو النقطة (٣ ، −١)

∴ ل = −٣ ، ك = ١ ، حـ = $ل^٢ + ك^٢ − نق^٢$ = ٩ + ١ − ٩ = ١

∴ معادلة الدائرة هى : $س^٢ + ص^٢$ − ٦ س + ٢ ص + ١ = ٠ .

مثال ١١

دائرة مركزها م = (−٢ ، ٧) وطول نصف قطرها نق = ٥ وحدات. بيِّن أى النقط الآتية يقع على الدائرة وأيها يقع داخلها وأيها يقع خارجها : أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٠ ، −٥) ، حـ = (٢ ، ٤)

الحل

∵ معادلة الدائرة هى : $(س + ٢)^٢ + (ص − ٧)^٢ = ٢٥$

وبالتعويض بالنقط أ ، ب ، حـ فى الطرف الأيمن للمعادلة.

∵ $(−١ + ٢)^٢ + (٣ − ٧)^٢ = ١٧ < نق^٢$ ∴ النقطة أ (−١ ، ٣) تقع داخل الدائرة

، ∵ $(٠ + ٢)^٢ + (−٥ − ٧)^٢ = ١٤٨ > نق^٢$ ∴ النقطة ب (٠ ، −٥) تقع خارج الدائرة

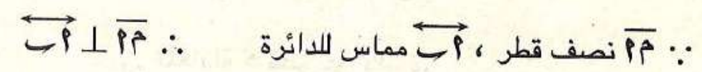
، ∵ $(٢ + ٢)^٢ + (٤ − ٧)^٢ = ٢٥ = نق^٢$ ∴ النقطة حـ (٢ ، ٤) تقع على الدائرة.

مثال ١٢

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها م = (٢ ، ٣) والمستقيم ٣ س + ٤ ص + ٢ = ٠

مماس لها عند النقطة أ

الحـــل



∵ $\overline{مأ}$ نصف قطر ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة ∴ $\overline{مأ} \perp \overleftrightarrow{أب}$

∴ م أ = $\frac{|٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٢|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$ = ٤ وحدة طولية

∴ نق = ٤ وحدة طولية

∴ معادلة الدائرة هى : $(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١٦$

مثال ١٣

حدد موضع الدائرة $د_١$: $(س - ٣)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

بالنسبة للدائرة $د_٢$: $س^٢ + ص^٢ + ٢ س + ٢ ص + ١ = ٠$

الحـــل

∵ $د_١$: $(س - ٣)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$ ∴ المركز $م_١ = (٣ ، ٢)$

، $نق_١ = \sqrt{٤} = ٢$ وحدة طولية

، ∵ $د_٢$: $س^٢ + ص^٢ + ٢ س + ٢ ص + ١ = ٠$ ∴ المركز $م_٢ = (-١ ، -١)$

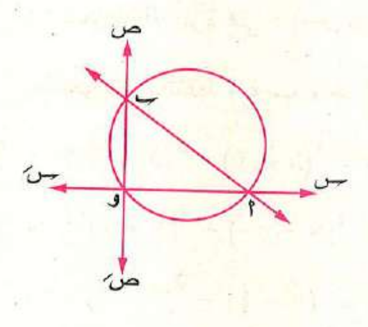
، $نق_٢ = \sqrt{١ + ١ - ١} = ١$ وحدة طولية ∴ $نق_١ + نق_٢ = ٢ + ١ = ٣$ وحدة طولية

، $م_١ م_٢ = \sqrt{(٣ + ١)^٢ + (٢ + ١)^٢} = ٥$ وحدة طولية

∴ $م_١ م_٢ > نق_١ + نق_٢$ ∴ الدائرتان متباعدتان.

مثال ١٤

فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى :

٦ س + ٨ ص - ٤٨ = ٠

ويقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين أ ، ب

أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط أ ، و ، ب

الحـــل

$\because$ ق(∠ ٢ و ب) = ٩٠° $\therefore$ $\overline{٢ب}$ قطر فى الدائرة

، $\because$ معادلة $\overleftrightarrow{٢ب}$ هى : ٦ س + ٨ ص = ٤٨

أى أن : $\frac{س}{٨} + \frac{ص}{٦} = ١$

$\therefore$ المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ٢ = (٨ ، ٠) ، يقطع محور الصادات فى النقطة ب = (٠ ، ٦)

وبفرض أن م مركز الدائرة $\therefore$ م منتصف $\overline{٢ب}$ = $\left(\frac{٨ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٦}{٢}\right)$ = (٤ ، ٣)

، $\because$ ٢ب = $\sqrt{(٨)^٢ + (٦)^٢}$ = ١٠ وحدة طولية.

$\therefore$ نق = ٥ وحدة طولية $\therefore$ معادلة الدائرة هى : $(س - ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

مثال ١٥

أوجد مساحة سطح مثلث متساوى الأضلاع تمر برءوسه الدائرة :

$س^٢ + ص^٢ + ٦ س - ٢ ص - ١٥ = ٠$ علمًا بأن كل وحدة طول فى المستوى الإحداثى تمثل ٤ سم

الحـــل



$\because$ ل = ٣ ، ك = -١ ، حـ = -١٥

$\therefore$ نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - حـ}$ = $\sqrt{٩ + ١ + ١٥}$ = ٥ وحدة طولية

فإذا كانت م هى مركز الدائرة التى تمر برؤوس

Δ ٢ب حـ المتساوى الأضلاع ورسمنا $\overline{م٢}$ ، $\overline{مب}$ ، $\overline{محـ}$ فإن :

ق(∠ ب م حـ) = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠° ويكون :

مساحة سطح Δ ٢ب حـ = ٣ × مساحة سطح Δ م ب حـ

= ٣ × $\frac{١}{٢}$ م ب × م حـ × جا (∠ ب م حـ) = $\frac{٣}{٢}$ نق^٢ جا ١٢٠°

= $\frac{٣}{٢}$ × ٢٥ جا ٦٠° = $\frac{٣}{٢}$ × ٢٥ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{٧٥\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

، $\because$ كل وحدة طول فى المستوى الإحداثى تمثل ٤ سم

$\therefore$ الوحدة المربعة فى المستوى الإحداثى تمثل مساحة قدرها = $(٤)^٢$ = ١٦ سم^٢

$\therefore$ مساحة المثلث ٢ب حـ = $\frac{٧٥\sqrt{٣}}{٤}$ × ١٦ = ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ سم^٢

ملاحظــة

إذا كان عدد أضلاع مضلع منتظم = ن ضلعًا ، طول نصف قطر الدائرة المارة برءوسه = نق

فإن : مساحة سطح المضلع المنتظم = $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠^\circ}{ن} \right)$

فمثلًا : السداسى المنتظم المرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٨ سم تكون :

مساحة سطحه = $\frac{٦}{٢}$ × $(٨)^{٢}$ × جا $\left(\frac{٣٦٠^\circ}{٦} \right)$ = ٣ × ٦٤ × جا ٦٠°

= ٣ × ٦٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٩٦ $\sqrt{٣}$ وحدة مربعة.

مثال (١٦)

أوجد المعادلة الإحداثية للدائرة التى تمر بالنقط : أ = (٦ ، ٣) ، ب = (٢ ، ٣)

، حـ = (٤ ، ١) ثم عيِّن مركزها وطول نصف قطرها.

الحــل

نفرض أن معادلة الدائرة هى : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

∵ النقط أ ، ب ، حـ تقع على الدائرة فهى تحقق معادلتها

∴ ٣٦ + ٩ + ١٢ ل + ٦ ك + حـ = ٠ أى : ١٢ ل + ٦ ك + حـ = −٤٥ (١)

، ٤ + ٩ + ٤ ل + ٦ ك + حـ = ٠ أى : ٤ ل + ٦ ك + حـ = −١٣ (٢)

، ١٦ + ١ + ٨ ل + ٢ ك + حـ = ٠ أى : ٨ ل + ٢ ك + حـ = −١٧ (٣)

بطرح (٢) من (١) : ∴ ٨ ل = −٣٢ ∴ ل = −٤

وبطرح (٣) من (١) : ∴ ٤ ل + ٤ ك = −٢٨ ∴ ل + ك = −٧

∴ −٤ + ك = −٧ ∴ ك = −٣

وبالتعويض فى (٣) عن ل ، ك : ∴ −٣٢ − ٦ + حـ = −١٧ ∴ حـ = ٢١

∴ المعادلة هى : س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س − ٦ ص + ٢١ = ٠ حيث المركز = (٤ ، ٣)

، نق = $\sqrt{١٦ + ٩ - ٢١}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢ وحدة طولية.

مثال ١٧

أوجد معادلة الدائرة التى تمس محور السينات وتمر بالنقطتين : (-١ ، ٢) ، (-٣ ، ٤)

الحـــل

∵ الدائرة تمس محور السينات ∴ نق = |ك| ، حـ = ل^٢

لذلك نفرض أن معادلة الدائرة هى : س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^٢ = ٠

، ∵ الدائرة تمر بالنقطة (-١ ، ٢) فهى تحقق معادلتها.

∴ ١ + ٤ - ٢ ل + ٤ ك + ل^٢ = ٠ ∴ ل^٢ - ٢ ل + ٤ ك = -٥ (١)

، ∵ الدائرة تمر بالنقطة (-٣ ، ٤) فهى تحقق معادلتها.

∴ ٩ + ١٦ - ٦ ل + ٨ ك + ل^٢ = ٠ ∴ ل^٢ - ٦ ل + ٨ ك = -٢٥ (٢)

بضرب المعادلة (١) × ٢ والطرح من المعادلة (٢) :

∴ - ل^٢ - ٢ ل = -١٥

∴ ل^٢ + ٢ ل - ١٥ = ٠

∴ (ل - ٣) (ل + ٥) = ٠ ∴ ل = ٣ أ، ل = -٥

∴ ك = -٢ أ، ك = -١٠

∴ توجد دائرتان فى إحداهما ل = ٣ ، ك = -٢ فتكون المعادلة هى :

س^٢ + ص^٢ + ٦ س - ٤ ص + ٩ = ٠

وفى الدائرة الأخرى ل = -٥ ، ك = -١٠ فتكون المعادلة هى :

س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ٢٠ ص + ٢٥ = ٠

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مركز الدائرة التى $\overline{أب}$ قطر فيها حيث : أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٥ ، −٣) هو ....

(أ) (٤ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (−٦ ، −٦) (د) (٠ ، ٤)

(٢) الدائرة التى معادلتها $س^2 + ص^2 - 4 س + 2 ص - 4 = 0$

طول نصف قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٩

(٣) الدائرة التى معادلتها $(س + 2)^2 + ص^2 + 2 ص = 0$ طول نصف قطرها

يساوى .... وحدة طول.

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٤) طول قطر الدائرة : $4 س^2 + 4 ص^2 + 16 س - 8 ص - 16 = 0$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) إذا كان المستقيمان : ص = −٦ ، ص = ٨ يمسان دائرة م

فإن طول نصف قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) ١٤

(٦) إذا كان المستقيم : ص = ٢ يمس الدائرة م التى مركزها (٦ ، ٩)

فإن طول قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(٧) طول نصف قطر الدائرة :

$(ن + 3) س^2 + ص^2 - 4 ص + (م - 2) س ص + (م - ن) س - 8 = 0$

هو .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) $2\sqrt{2}$

(٨) مساحة الدائرة التى معادلتها : $(س - 5)^2 + (ص + 4)^2 = 7$ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) $3,5\pi$ (ب) 7π (جـ) $12,25\pi$ (د) 49π



(٩) إذا كانت المعادلة : ٢ $س^٢$ + أ $ص^٢$ + ب س ص − ٥ = ٠ تمثل دائرة

فإن مساحتها = ... وحدة مربعة.

(أ) ٥ π (ب) $\sqrt{٥}$ π (جـ) $\frac{٥}{٢}$ π (د) ٥ $\sqrt{٢}$ π

(١٠) محيط الدائرة التى معادلتها : $س^٢$ + $ص^٢$ + ٢ س − ٢ ص − ٢ = ٠ هو .... وحدة طول.

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٤ π (د) ٨ π

(١١) محيط الدائرة التى معادلتها : $س^٢$ + $ص^٢$ = ٨ هو .... وحدة طول.

(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ π (د) ٤ $\sqrt{٢}$ π

(١٢) إذا كان المستقيمان : س = −٣ ، س = ٤ يمسان الدائرة م

فإن محيطها = ... وحدة طول. حيث (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ٢٢ (ب) ٤٤ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(١٣) إذا كان : (س ص ٨) $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٢ \end{pmatrix}$ = ▭ فإن المعادلة الناتجة تمثل دائرة

طول قطرها = ... وحدة طول. حيث ▭ المصفوفة الصفرية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٤) المعادلة : $\begin{vmatrix} س & ت ص \\ ت ص & س \end{vmatrix}$ − ٤٩ = ٠ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٤٩ (ب) ١٤ (جـ) ٩ (د) ٧

(١٥) أى المعادلات الآتية يعبر عن دائرة ؟

(أ) $س^٢$ − $ص^٢$ + س − ص = ٦ (ب) ٢ $س^٢$ + $ص^٢$ − س + ص = ٥

(جـ) $س^٢$ + $ص^٢$ − س = ٦ (د) $س^٢$ + $ص^٢$ − س ص = ٦

(١٦) إذا كانت المعادلة : ٢ $س^٢$ + (أ − ١) $ص^٢$ + ٥ س − ٣ ص = ٧ تمثل دائرة فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٧) إذا كانت : $س^٢$ + $ص^٢$ + ٢ (جتا θ) س − ٢ (جا θ) ص − ٨ = ٠ تمثل معادلة دائرة

فإن : نق = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٨

(١٨) الدائرة التى معادلتها : $(س − ٢)^٢$ + $(ص + ٣)^٢$ = ١٦ مركزها ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (١٣ ، ١٦) (د) (٤ ، ٩)

(١٩) مركز الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

(٢٠) مركز الدائرة التى معادلتها : ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ١٢ س − ١٦ ص = ٠ هو ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٦ ، ٨) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (٦ ، −٨)

(٢١) 📖 الدائرة : (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} + ٢ ص = ٠ مركزها النقطة ....

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (−٢ ، −١) (جـ) (٢ ، −١) (د) (−٢ ، ٠)

(٢٢) مركز الدائرة التى تمر بنقطة الأصل والنقطتين أ (−٦ ، ٠) ، ب (٠ ، ٨) هو ....

(أ) (٤ ، −٣) (ب) (−٥ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٥) (د) (−٣ ، ٤)

(٢٣) إذا مست أى دائرة محورى الإحداثيات وكانت مرسومة فى الربع الأول فإن مركزها يقع على المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) ص = − س (جـ) ص = س + ١ (د) ص = س − ١

(٢٤) كم عدد الدوائر التى مركزها (٣ ، −٥) وتمس أحد المحورين ؟

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٥) النقطة (٢ ، ٢) تقع .... الدائرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ٩

(أ) على (ب) داخل (جـ) خارج (د) فى مركز

(٢٦) 📖 النقطة (٢ ، ٠) تقع على ....

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم : ص = ٢ س (د) الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = ٩

(٢٧) 📖 النقطة التى تقع على الدائرة : (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣ من النقط الآتية هى ....

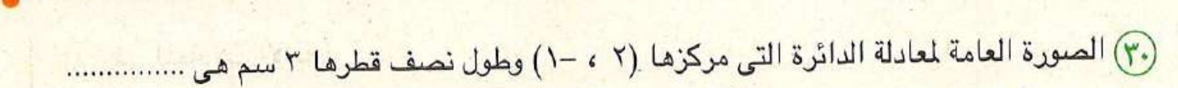
(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

(٢٨) الدائرة التى معادلتها : (س − ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٥ تمر بالنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٣ ، −١) (جـ) (٢ ، −٤) (د) كل ما سبق.

(٢٩) الدائرة د : (س + ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩ يمثلها الشكل ....

(أ) (ب) (جـ) (د)



(٣٠) الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٢ ص - ٩ = ٠$ (ب) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٢ ص - ٤ = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س - ص + ٣ = ٠$ (د) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س - ص + ٩ = ٠$

(٣١) معادلة الدائرة التى مركزها (٤ ، ٣) وتمس محور السينات هى ....

(أ) $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$ (ب) $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٩$

(جـ) $(س + ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٩$ (د) $(س + ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$

(٣٢) معادلة الدائرة التى تمس المحورين ومركزها النقطة (−٤ ، ٤) هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$ (ب) $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س + ٨ ص + ١٦ = ٠$ (د) $س^{٢} + ص^{٢} = ٨$

(٣٣) معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ = ٠$

بالانتقال (س + ٢ ، ص − ٢) هى ....

(أ) $(س + ٨)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥$ (ب) $(س - ٨)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥$

(جـ) $(س - ٨)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٢٥$ (د) $(س + ٥)^{٢} + (ص - ٨)^{٢} = ٢٥$

(٣٤) معادلة الدائرة التى مركزها (−٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هى ....

(أ) $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٥$ (ب) $(س - ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥$

(جـ) $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٦٢٥$ (د) $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٢٥$

(٣٥) معادلة الدائرة التى مركزها (١ ، ٢) وتمس المستقيم : $٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠$ هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س - ٤ ص = ١٦$ (ب) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٤ ص - ١١ = ٠$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٤ ص - ١٦ = ٠$ (د) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س - ٤ ص = ١١$

(٣٦) معادلة الدائرة التى مركزها يقع على المستقيم : $ص = \frac{١}{٢} س$ وتمس محور السينات يمكن أن تكون ....

(أ) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٤$ (ب) $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ١٦$

(جـ) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$ (د) $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٤$

(٣٧) معادلة الدائرة متحدة المركز مع الدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٢ ص - ٦ = ٠$

وتمر بالنقطة (−٣ ، ٤) هى ....

(أ) $(س + ٣)^{٢} + ص^{٢} = ١٦$ (ب) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥$

(جـ) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١٦$ (د) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٦١$

(٣٨) فى المعادلات الآتية :

الدائرة التى مركزها يقع على محور الصادات ولا تقطع محور السينات معادلتها هى ....

(أ) $س^2 + (ص - ١)^2 = ٤$ (ب) $س^2 + (ص - ٥)^2 = ٢٥$

(جـ) $س^2 + (ص + ٥)^2 = ٩$ (د) $(س + ٥)^2 + ص^2 = ١٦$

(٣٩) معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (-٤ ، -٣) ومساحة سطحها ٢٥ π $سم^2$ هى ....

(أ) $س^2 + ص^2 - ٨ س + ٦ ص - ٢٥ = ٠$ (ب) $س^2 + ص^2 + ٨ س + ٦ ص = ٠$

(جـ) $س^2 + ص^2 + ٤ س + ٣ ص + ٢٥ = ٠$ (د) $س^2 + ص^2 + ٨ س - ٦ ص = ٠$

(٤٠) أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ = (-١ ، ٤) ، ب = (٧ ، ٨) ، حـ = (٩ ، ٤) ، ء = (١ ، ٠)

فإن معادلة الدائرة المارة برؤوسه هى ....

(أ) $(س - ٤)^2 + (ص - ٤)^2 = ٢٥$ (ب) $(س - ٤)^2 + (ص - ٤)^2 = ١٦$

(جـ) $(س + ٤)^2 + (ص + ٤)^2 = ٢٥$ (د) $(س - ٤)^2 + (ص + ٤)^2 = ١٦$

(٤١) أ ب حـ ء مربع مركزه الهندسى نقطة الأصل وطول ضلعه $٢\sqrt{٣}$ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة التى تمس أضلاعه هى ....

(أ) $س^2 + ص^2 = ٣$ (ب) $س^2 + ص^2 = ١٢$

(جـ) $س^2 + ص^2 = ٦$ (د) $(س - \sqrt{٣})^2 + (ص - \sqrt{٣})^2 = ٣$

(٤٢) معادلة الدائرة التى تمر برؤوس سداسى منتظم مساحته $٦\sqrt{٣}$ $سم^2$ ومركزها نقطة الأصل هى ....

(أ) $س^2 + ص^2 = ٢$ (ب) $س^2 + ص^2 = ٤$

(جـ) $س^2 + ص^2 = ٩$ (د) $س^2 + ص^2 = ١٦$

(٤٣) الدائرة التى معادلتها : $(س - أ)^2 + (ص - ب)^2 = أ^2$ حيث (أ ≠ ب) ....

(أ) تمس محور السينات. (ب) تمس محور الصادات.

(جـ) تمس محورى الإحداثيات. (د) لا تمس أيًا من المحورين.

(٤٤) إذا كان محور الصادات مماسًا للدائرة : $س^2 + ص^2 + ٤ س + م ص + ٤ = ٠$

فإن : م = ...

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) صفر (د) ± ٤

(٤٥) إذا كانت الدائرة التى معادلتها : $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص + حـ = ٠$ تمس محور السينات

فإن : حـ = ...

(أ) -٩ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) -٦

(٤٦) إذا كان محور السينات مماسًا للدائرة : $س^٢ + ص^٢ + م س + ٤ ص + ٧ - ٣ م = ٠$

فإن : م = ...

(أ) ٢ أ، ١٤ (ب) -٢ أ، -١٤ (جـ) ٢ أ، -١٤ (د) -٢ أ، ١٤

(٤٧) إذا كان المستقيم : $٣ س - ٤ ص - ١٢ = ٠$ يمس الدائرة $(س + ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = نق^٢$

فإن محيط الدائرة = ... وحدة طول (بدلالة π)

(أ) ٥ π (ب) ١٠ π (جـ) ١٥ π (د) ٢٠ π

(٤٨) إذا كان المستقيم : ص = م س يمس الدائرة $(س - ٢)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٤$ فإن : م = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٤٩) المستقيم : ص = ٥ - ٢ س .... الدائرة التي معادلتها :

$س^٢ + ص^٢ - ٨ س - ٤ ص + ١٥ = ٠$

(أ) يمس (ب) يقطع (جـ) خارج (د) يمر بمركز

(٥٠) الدائرتان $د_١$: $(س + ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ = ٤$ ، $د_٢$: $(س - ٥)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$ ....

(أ) متباعدتان. (ب) متماستان من الخارج.

(جـ) متماستان من الداخل. (د) متقاطعتان.

(٥١) الدائرتان $(س + ٢)^٢ = ١ - ص^٢$ ، $س^٢ + ص^٢ - ٢ س - ٨ ص - ١٩ = ٠$ تكونان ....

(أ) متقاطعتين. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متباعدتين. (د) متماستين من الخارج.

(٥٢) إذا كان المستقيم ل : $٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠$

يمس الدائرة د : $س^٢ + ص^٢ - ٢٢ س - ٤ ص - حـ = ٠$ فإن : حـ = ...

(أ) ١٥ (ب) -٢٠ (جـ) ٢٥ (د) -٢٥

(٥٣) طول القطعة المماسة للدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ٩$ من النقطة (٥ ، ٠) يساوي .... وحدة طول.

(أ) ١٤ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٤

(٥٤) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة : $س^٢ + ص^٢ + ٦ س - ٨ ص + ١٥ = ٠$

عند النقطة أ (-٢ ، ١) فإن معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي ....

(أ) $س - ٣ ص + ٥ = ٠$ (ب) $س - ٣ ص = ٥$

(جـ) $٣ س - ص - ٥ = ٠$ (د) $٣ ص - س + ٥ = ٠$

(٥٥) إذا قطع محور السينات الدائرة التى معادلتها : $س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩$ فى النقطتين أ ، ب فإن طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٤٩ (ب) ٧ (جـ) ٢ (د) ١٤

(٥٦) نقطتا تقاطع الدائرة : $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٦$ مع محور السينات هما ....

(أ) (٦ ، ٠) ، (−٢ ، ٠) (ب) (−٦ ، ٠) ، (٢ ، ٠)

(جـ) (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠) (د) (٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠)

(٥٧) إذا قطع المستقيم : ص = ٢ الدائرة التى معادلتها : $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٢٥$ فى النقطتين أ ، ب فإن : أب = ... وحدة طول.

(أ) $٢\sqrt{١٣}$ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٥٨) إذا كان المستقيم : ص − ٢ س + ٥ = ٠ يقطع الدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س - ٨ ص = ٠$ فى النقطتين أ ، ب فإن بعد مركز الدائرة عن الوتر $\overline{أب}$ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) $٢\sqrt{٥}$

(٥٩) دائرة مركزها م = (٥ ، ٤) وطول نصف قطرها = ٥ وحدة طول وتقطع محور السينات فى أ ، ب فإن : مساحة Δ م أ ب = ... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٦٠) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ محور تماثل للدائرة التى معادلتها : $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$ وكانت أ ، ب تنتميان للدائرة حيث : أ = (−٢ ، ٥) فإن : ب = ...

(أ) (٢ ، −٥) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٥ ، −٢)

(٦١) مساحة سطح المربع الذى تمر برؤوسه الدائرة التى معادلتها : $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٦ ص + ٤ = ٠$ هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٦٢) سداسى منتظم مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٤ سم فإن مساحته = ... $سم^{٢}$.

(أ) $٨\sqrt{٣}$ (ب) $١٦\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ (د) $٢٤\sqrt{٣}$

(٦٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان : و ب = ٥ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هى ....

(أ) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٢٥$

(ب) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٤$

(جـ) $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٢٥$

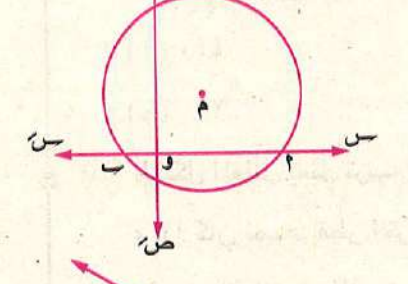
(د) $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٤$

(٦٤) معادلة الدائرة التى تمس المستقيمات س = ٤ ، س = −٢ ، ص = ٠ يمكن أن تكون ....

(أ) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٣٦ (ب) (س − ١)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٣٦

(جـ) (س − ١)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٩ (د) (س + ١)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٩

(٦٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة الدائرة هى : (س − ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٥

فإن : أب = ... وحدة طولية.

(أ) ٨ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٥

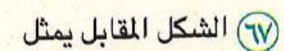
(٦٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الدائرة م هى : (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥

، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ حيث : ب = (−٢ ، ١٠)

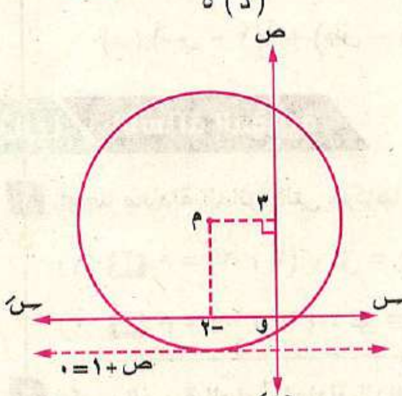
فإن : أب = ... وحدة طولية.

(أ) ١٣ (ب) $\sqrt{١٩٤}$ (جـ) ١٢ (د) ٥



(٦٧) الشكل المقابل يمثل

معادلة الدائرة ....



(أ) (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٦

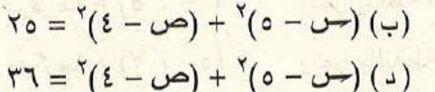
(ب) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ١٦

(جـ) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٤

(د) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩

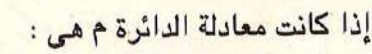
(٦٨) إذا كانت م دائرة محيطها = ١٠ π وحدة طولية تقطع محور السينات فى النقطتين أ (٢ ، ٠) ، ب (٨ ، ٠) فإن معادلة الدائرة م يمكن أن تكون ....

(أ) (س + ٥)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٢٥ (ب) (س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٢٥



(جـ) (س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٩ (د) (س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٣٦

(٦٩) فى الشكل المقابل :



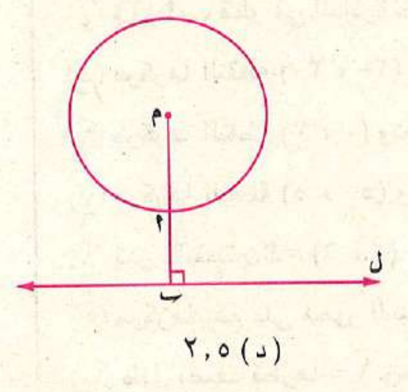
إذا كانت معادلة الدائرة م هى :

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٤ ص − ١٢ = ٠

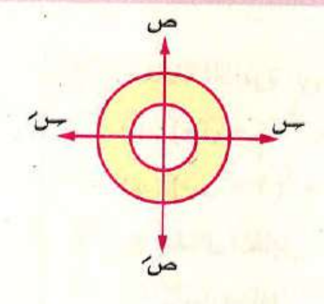
، $\overline{مب}$ ⊥ المستقيم ل حيث معادلة ل هى :

٣ س − ٤ ص + ٢٣ = ٠ ، أ ∈ $\overline{مب}$

فإن طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طولية.



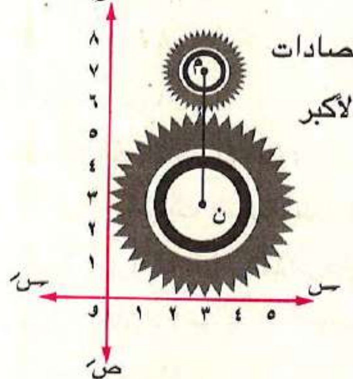
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٢,٥



(٧٠) الشكل المقابل يمثل قرص فى آلة يراد تصنيع مثله فإذا كان ثمن الوحدة المربعة من سطح القرص يتكلف ٥ جنيهات وكانت معادلة الدائرة الصغرى هى : $س^٢ + ص^٢ = ٤$ وطول قطر الدائرة الكبرى ١٠ وحدات طولية فإن تكلفة تصنيع القرص ≃ .... جنيه.

(أ) ٤٤٠ (ب) ٦٦٠

(جـ) ٢٢٠ (د) ٣٣٠



(٧١) الشكل المقابل يمثل ترسين فى آلة مركزهما م ، ن ، $\overline{مـن}$ // محور الصادات ، إذا كان نصف قطر الترس الأصغر يساوى $\frac{١}{٣}$ نصف قطر الترس الأكبر فإن معادلة الترس الأصغر هى ....

(أ) $(س - ٣)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٩$

(ب) $(س - ٣)^٢ + (ص - ٧)^٢ = ١$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ١٤ ص + ٥٨ =$ صفر

(د) $(س - ١)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (م) وطول نصف قطرها = نق فى كل من الحالات الآتية :

(١) م = (٢ ، ٣) ، نق = ٥

(٢) م = (٠ ، ٠) ، نق = ٣

(٣) م = (٠ ، −١) ، نق = $٢ \sqrt{٣}$

(٤) م = (−٤ ، −٣) ، نق = $\frac{٣}{٢}$

٢ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان :

(١) مركزها م (−٢ ، ٣) وطول قطرها ٨ وحدات طولية.

(٢) مركزها م (٥ ، −١٢) وتمر بنقطة الأصل.

(٣) مركزها م (٧ ، −٥) وتمر بالنقطة أ = (٣ ، ٢)

(٤) $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة حيث أ = (٦ ، −٤) ، ب = (٠ ، ٢)

(٥) مركزها النقطة (−٣ ، −٢) وتمس محور السينات.

(٦) مركزها النقطة (٣ ، ٠) وتمس محور الصادات.

(٧) مركزها النقطة (٥ ، −٥) وتمس محورى الإحداثيات.

(٨) تمر بالنقطتين أ = (٦ ، ٢) ، ب = (٠ ، −١) والمماسان لها عند أ ، ب متوازيان.

(٩) مركزها يقع على محور السينات وتمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٨ ، ٠)

(١٠) طول نصف قطرها = ٦ وحدات وتمس المحورين وتقع فى الربع الرابع.

٣ أوجد إحداثيى المركز ، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية :

① $س^٢ + ص^٢ - ٨ = ٠$

② (س + ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩

③ (س + ٤)^٢ + ص^٢ = ٩

④ س^٢ + (ص + ٧)^٢ = ٢٤

⑤ س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٦ ص - ١٢ = ٠

⑥ س^٢ + ص^٢ - ٨ س = ١٢

٤ بيِّن أى دائرتين مما يلى متطابقتان ؟ ولماذا ؟

① س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٨ ص = ٠ ، س^٢ + ص^٢ + ١٢ ص + ١٦ = ٠

② س^٢ + ص^٢ + ١٤ ص = ١ ، س^٢ + ص^٢ + ١٠ س - ٢٥ = ٠

③ س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٤ ص - ٣ = ٠ ، س^٢ + ص^٢ + ٦ س - ١١ = ٠

٥ يبين الشكل المقابل

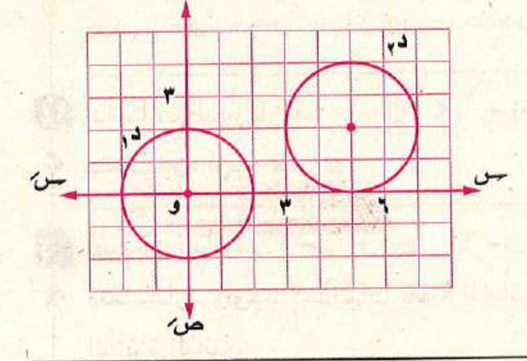
الدائرتين د$_١$ ، د$_٢$

أثبت أن الدائرتين متطابقتان

ثم أوجد معادلة كل منهما

وإذا كانت الدائرة د$_٣$ هى صورة الدائرة د$_١$

بالانتقال (-٤ ، ٣) اكتب معادلة الدائرة د$_٣$



٦ بيِّن مع ذكر السبب أيًا من المعادلات الآتية تمثل دائرة وأيها لا تمثل دائرة :

① س^٢ + س ص + ص^٢ = ٢٥

② س^٢ + ص^٢ + ٨ س - ١٦ ص - ١ = ٠

③ س^٢ + ٢ ص^٢ + ٦ س - ٥ ص = ٠

④ ٢ س^٢ + ٢ ص^٢ + ٣ ص - ٨ = ٠

⑤ (س + ص)^٢ - ٣ س + ٦ ص - ٤ = ٠

⑥ س^٢ + ص^٢ + س + ٢ ص + ٧ = ٠

⑦ س^٢ + ص^٢ + ٢ س - ٤ ص + ٥ = ٠

⑧ $\frac{١}{٤}$ س^٢ + $\frac{١}{٤}$ ص^٢ + س - ٨ = ٠

⑨ س^٢ + س = ص^٢ + ص + ٧

٧ م$_١$ ، م$_٢$ مركزا دائرتين حيث م$_١$ = (٢ ، -١) ، م$_٢$ = (-١ ، ٣)

أوجد معادلتى هاتين الدائرتين إذا علم أن كلًا منهما تمر بمركز الأخرى.

٨ أثبت أن الدائرتين : س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

، ٤ س^٢ + ٤ ص^٢ - ٨ س + ٢٤ ص + ١٥ = ٠ متحدتا المركز

، أوجد طول نصف قطر كل منهما. «٣ ، ٢,٥ وحدة طول»

٩ بيِّن أى النقط التالية تنتمى إلى الدائرة د التى معادلتها : $(س - ٦)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٢٥$

، ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة د حيث :

أ (٩ ، ٣) ، ب (٧ ، ٥) ، جـ (٣ ، ٣) ، ء (٢ ، -٣)

---

١٠ دائرة مركزها م = (٢ ، -١) وتمر بالنقطة أ = (-١ ، ٣) بيِّن مواقع النقط الآتية بالنسبة للدائرة م : ب = (٢ ، ٤) ، جـ = (-٣ ، ١) ، ء = (١ ، ٢)

---

١١ حدد وضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة : $(س + ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٩$ إذا كانت معادلة المستقيم هى :

(١) ٣ س - ٤ ص + ٥ = ٠ (٢) ٦ س - ٨ ص + ٢٣ = ٠ (٣) ٣ س - ٤ ص + ١٠ = ٠

---

١٢ حدد موضع الدائرة $د_١$: $(س - ٥)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٤$ بالنسبة للدائرة $د_٢$: $(س + ٧)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١$

---

١٣ هل الدائرتان $د_١$: $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$

، $د_٢$: $س^٢ + ص^٢ + ١٤ س + ١٠ ص - ٢٦ = ٠$ متماستان من الخارج ؟ فسر إجابتك.

---

١٤ إذا كانت الدائرتان $د_١$: $(س + ٢)^٢ + (ص + ١١)^٢ = ك$ ، $د_٢$: $(س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$

متماستين. أوجد قيم ك «٨١ أ ، ٢٨٩»

---

١٥ أثبت أن الدائرتين : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ٤ ص + ١٢ = ٠$ ، $س^٢ + ص^٢ + ٢ س - ٤ ص - ٤ = صفر$

متماستان. وأوجد إحداثيات نقطة التماس ثم أوجد معادلة الدائرة التى مركزها نقطة التماس وتمر بمركز الدائرة الثانية.

---

١٦ اكتب معادلة دائرة الوحدة وإذا كانت النقطة (٢ أ جتا هـ ، ٢ أ جا هـ) تنتمى لهذه الدائرة

أوجد قيم أ الحقيقية. «$\pm \frac{١}{٢}$»

---

١٧ أوجد قيم هـ الحقيقية التى تجعل كلًا مما يأتى يعبر عن معادلة دائرة :

(١) $س^٢ + ص^٢ - ٢ س - ٤ ص - هـ + ٢ = ٠$

(٢) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٦ ص - هـ^٢ + ٤ = ٠$

(٣) $س^٢ + ص^٢ - ٤ هـ س - ٢ هـ ص + ١٠ (هـ - ١) = ٠$

(٤) $س^٢ + ص^٢ + ٦ س + ٨ ص + هـ^٢ - ٣ هـ + ١٥ = ٠$

(٥) $س^٢ + ص^٢ + ٢ هـ س - ٦ هـ ص - ٢ هـ^٢ + ١٢ هـ - ٣ = ٠$

---

١٨ أوجد قيم أ فى المعادلة : $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٤ ص + ٢ أ - ٣ = ٠$ فى كل من الحالات الآتية :

(١) المعادلة تمثل دائرة.

(٢) المعادلة تمثل دائرة تمر بنقطة الأصل.

(٣) المعادلة تمثل دائرة تمس محور السينات.

(٤) المعادلة تمثل دائرة تمس محور الصادات.

(٥) المعادلة تمثل دائرة تمس المستقيم : ٣ س + ٤ ص + ١٥ = ٠

(٦) المعادلة تمثل دائرة طول قطرها ١٤ وحدة طولية.

١٩ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا علم أن :

(١) مركزها م (٥ ، ٤) وتمس المستقيم س = ٢

(٢) مركزها م (٥ ، ٣) وتمس المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٧) ، (−١ ، ٣)

(٣) مركزها م يقع فى الربع الأول وطول نصف قطرها يساوى ٣ وحدات طولية والمستقيمان س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها.

(٤) طول نصف قطرها = ٥ وحدات وتمس محور السينات عند النقطة (٤ ، ٠)

(٥) طول نصف قطرها = $\frac{1}{2}$ ٣ وحدة وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، −٤)

(٦) تمس المحورين وتمر بالنقطة (−٢ ، −٤)

(٧) تمس محور السينات عند النقطة (−٣ ، ٠) وتمس أيضًا محور الصادات.

(٨) تمس محور السينات عند النقطة (−٢ ، ٠) وتقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وترًا طوله ٤ $\sqrt{3}$ وحدة طول.

(٩) تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، −١) وتقطع من الجزء السالب لمحور السينات وترًا طوله ٤ $\sqrt{6}$ وحدة طول.

(١٠) تمس محور السينات وتمر بالنقطتين (٢ ، ١) ، (−٥ ، ٢)

(١١) تمس محور الصادات وتمر بالنقطتين (−٤ ، ٢) ، (−١ ، ٢)

(١٢) يقع مركزها على محور السينات وتمر بالنقطتين أ (١ ، ٣) ، ب (٢ ، −٤)

(١٣) تمر بنقطة الأصل وتقطع من الجزئين الموجبين لمحورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين طوليهما ١٢ ، ١٦ وحدة طولية على الترتيب.

(١٤) يقع مركزها على المستقيم : ص − س = ١ وتمر بالنقطتين أ = (−٢ ، ٤) ، ب = (٦ ، ٨)

(١٥) طول نصف قطرها = $\sqrt{85}$ وحدة طولية وتمر بالنقطتين أ = (−١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٤)

(١٦) $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ ، ب نقطتى تقاطع الدائرة س^2 + ص^2 + ٢ س + ٤ ص = ٠ مع محور السينات.

٢٠ أوجد مساحة سطح مثلث متساوى الأضلاع تمر برؤوسه الدائرة :

س^2 + ص^2 + س − ٤ ص − ٢ = ٠

«$\frac{75\sqrt{3}}{16}$ وحدة مربعة»

٢١ أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة سطح شكل خماسى منتظم تمر برؤوسه الدائرة :
$س^2 + ص^2 + ٦ س - ١٢ ص + ٥ = ٠$ علمًا بأن كل وحدة فى المستوى الإحداثى تمثل ٥ سم. «٢٣٧٨ سم^2»

٢٢ أوجد مساحة سطح سداسى منتظم تمر برؤوسه الدائرة :
$س^2 + ص^2 - ١٠ س + ٦ ص + ٢٥ = ٠$ «$\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة»

٢٣ أوجد مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا وتمر برؤوسه الدائرة :
$س^2 + ص^2 - ١٦ = ٠$ «٤٨ وحدة مربعة»

٢٤ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها = ٥ وحدات ومعادلتا مستقيمين يحملان قطرين فيها هما :
$٣ س + ص + ٢ = ٠$ ، $٤ س - ص - ١٦ = ٠$ ثم أثبت أن النقطة (٥ ، −٤) تنتمى للدائرة.

٢٥ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها يساوى طول نصف قطر الدائرة :
$س^2 + ص^2 - ٢ س جتا هـ - ٢ ص جا هـ - ٨ = ٠$ ومعادلتا مستقيمين يحملان قطرين فيها هما :
$س + ص = ٠$ ، $\overrightarrow{ر} = (١ ، ٥) + ك (١ ، ٢)$

٢٦ أوجد معادلة الدائرة التى تمر بنقطتى تقاطع الدائرتين :
$س^2 + ص^2 - ١٠ س = ٠$ ، $س^2 + ص^2 + ٢ س - ١٢ = ٠$ ومركزها :
(١) نقطة الأصل. (٢) النقطة (٢ ، ٠)

٢٧ أثبت أن : النقط أ = (٠ ، −١) ، ب = (−١ ، ٠) ، جـ = (−٩ ، ٠) تقع على دائرة مركزها م (−٥ ، −٥) وأوجد معادلة هذه الدائرة.

٢٨ إذا كانت النقط : أ = (٣ ، −٢) ، ب = (٣ ، ٨) ، جـ = (−١ ، ٠) تنتمى إلى دائرة واحدة فأثبت أن : $\overline{أب}$ قطر فيها ، ثم اكتب الصورة العامة لمعادلتها.

٢٩ أثبت أن : المثلث الذى رؤوسه النقط أ = (٨ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٦) ، جـ = (٠ ، ٠) قائم الزاوية ثم أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوسه.

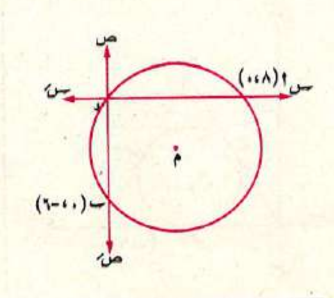
٣٠ أثبت أن : النقط أ = (−٢ ، ٠) ، ب = (٤ ، ٠) ، جـ = $(١ ، ٣\sqrt{٣})$ رؤوس المثلث أ ب جـ المتساوى الأضلاع ثم أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث.

٣١ أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقط : أ = (٢ ، −١) ، ب = (−٢ ، ٠) ، جـ = (٠ ، −٩) وعيّن مركزها وطول نصف قطرها.

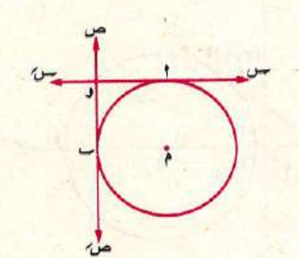
٣٢ إذا كانت : أ = (٣ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٩) ، جـ = (٠ ، ١) ، ء = (−١ ، ٢)
فأثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى.

٣٣ أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة م فى كل من الأشكال الآتية :

(١) الدائرة تمر بنقطة الأصل وتمر بالنقطتين أ ، ب

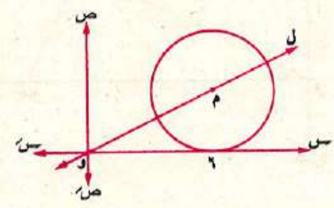


(٢) الدائرة تمس محورى الإحداثيات فى أ ، ب وطول م‾و = ٢ $\sqrt{2}$

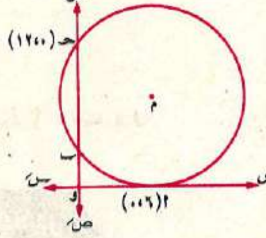


(٣) الدائرة مركزها يقع على محور الصادات وتقطع محور الصادات فى أ ، ب

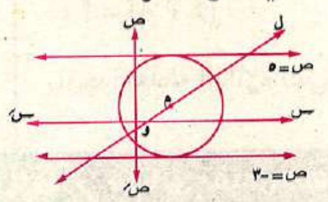
(٤) المستقيم ل لمعادلته : س − ٣ ص = ٠ يمر بمركز الدائرة وبنقطة الأصل.



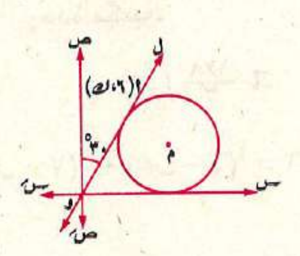
(٥) الدائرة تمس محور السينات عند أ وتقطع محور الصادات فى ب ، جـ



(٦) المستقيم ل : ٢س − ٣ ص = ١ يمر بمركز الدائرة والمستقيمان ص = ٥ ، ص = −٣ يمسان الدائرة.

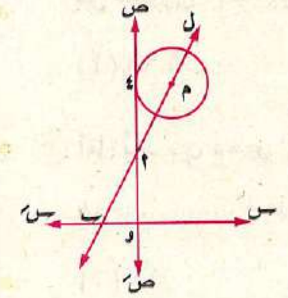


(٧) المستقيم ل يمس الدائرة عند النقطة أ (٦ ، ك) ويصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات والدائرة يمسها أيضًا محور السينات.

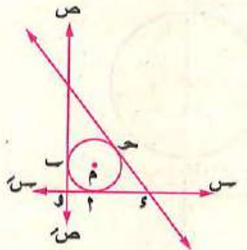


(٨) الدائرة تمس محور السينات عند ب وتمس المستقيم : س = ٢ عند جـ

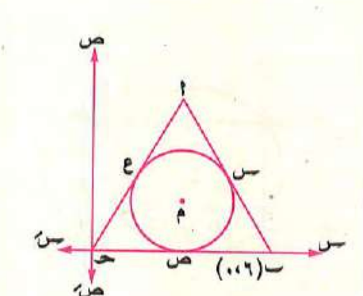
(٩) الدائرة تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٤) والمستقيم ل يمر بمركز الدائرة والنقطة أ (٠ ، ٢) ، ب (−١ ، ٠)



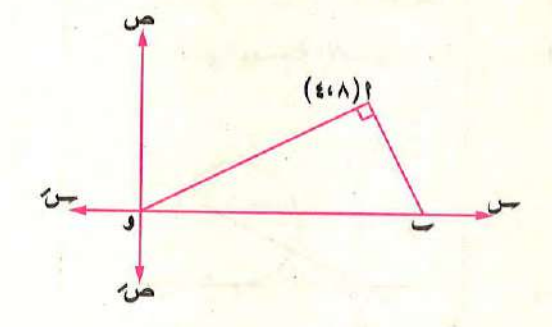
(١٠) الدائرة تمس محورى الإحداثيات فى أ ، ب والمستقيم : $٤ س + ٣ ص - ١٢ = ٠$ مماس للدائرة عند حـ



(١١) المستقيم ل يمس الدائرة عند أ (٢ ، ٣) ويقطع محور السينات عند ب (-٢ ، ٠)



(١٢) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع أضلاعه تمس الدائرة م ، ب = (٦ ، ٠)



---

٣٤ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{وأ} \perp \overline{أب}$

، أ = (٨ ، ٤)

أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط أ ، ب ، و

ص
أ(٨،٤)
س َ
و
ب
س
ص َ

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة : $(ك - ٢) س^٢ + (٢ - ك) ص^٢ - ك س + ٣ ك ص - ٢٥ = ٠$

(أ) تمثل دائرة عندما ك = ٢ (ب) تمثل دائرة عندما ك ≠ ٢

(جـ) تمثل دائرة عندما ك ∈ ح (د) لا تمثل دائرة مهما كانت قيمة ك

(٢) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٦ وحدات طولية وقاعدته دائرة معادلتها : $س^٢ + ص^٢ = ٦٤$ فى محورى الإحداثيات س ، ص فإن حجم المخروط = ... وحدة مكعبة.

(أ) ٩٦ π (ب) $\frac{٦٤٠}{٣}$ π (جـ) ١٢٨ π (د) $\frac{١٢٨}{٣}$ π

(٣) أقل بُعد بين محور الصادات ونقطة على الدائرة التى معادلتها $(س - ٧)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ١٦$ هو .... وحدة طولية.

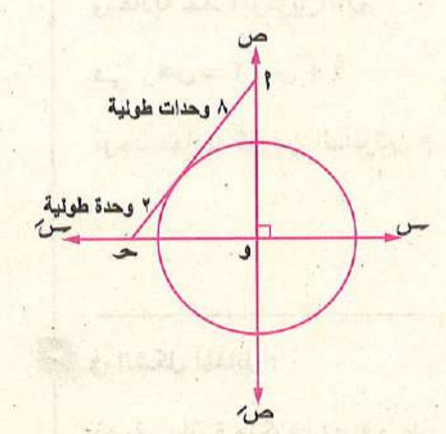
(أ) ١١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

④ عدد الدوائر التى تمس محورى الإحداثيات وتقع مراكزها على الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

يساوى ....

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٤

⑤ فى الشكل المقابل :



معادلة الدائرة هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$

(ب) $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٦٤$

(د) $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$

⑥ فى الشكل المقابل :

معادلة الدائرة هى ....

(أ) $(س + ٤)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٦٥$

(ب) $(س - ٦)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٦٤$

(جـ) $(س - ٤)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٦٥$

(د) $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٦٤$

⑦ إذا كانت و هى نقطة الأصل ، $\overleftrightarrow{وأ}$ ، $\overleftrightarrow{وب}$ مماسين للدائرة التى معادلتها :

$س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ س + ٤ ص + ٦ = ٠$ فإن مركز الدائرة الخارجة عن Δ أ و ب هو ....

(أ) $\left(\frac{٧}{٤} ، ٢\right)$　　(ب) $\left(\frac{٥}{٢} ، -١\right)$　　(جـ) $\left(\frac{٧}{٤} ، -١\right)$　　(د) $\left(\frac{٥}{٢} ، ٢\right)$

⑧ طول الوتر المشترك للدائرتين : $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ س - ١٠ ص = ٠$

، $س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س + ٢ ص - ٤٠ = ٠$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) $٥\sqrt{٢}$　　(ب) ١٠　　(جـ) ١٢　　(د) $١٠\sqrt{٢}$

٢ فى الشكل المقابل :

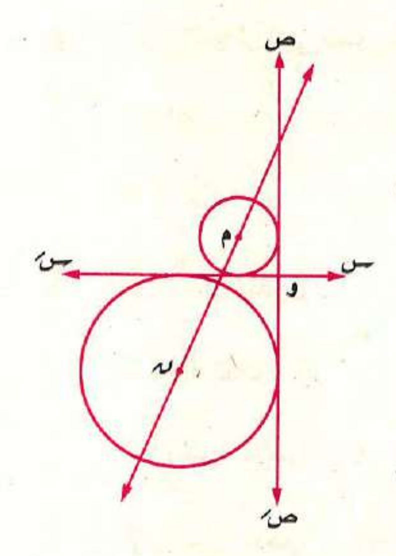
إذا كانت كل من الدائرتين م ، ں

تمس محورى الإحداثيات

ومعادلة خط المركزين $\overleftrightarrow{\text{مں}}$

هى : ص = ٢ س + ١

أوجد معادلة كل من الدائرتين م ، ں



---

٣ فى الشكل المقابل :

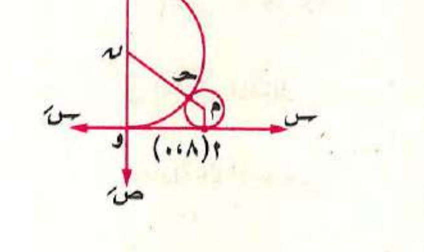
نصف دائرة مركزها ں يقع على محور الصادات

، وتمس دائرة م عند النقطة ﺣ

، محور السينات يمس الدائرة م عند أ

حيث أ = (٨ ، ٠) ، ب = (٠ ، ١٦)

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة م



تطبيقات حياتية

١ تخطيط المدن : فى رسم لإحدى المدن على مستوى إحداثى متعامد كل وحدة فيه تمثل ٥ أمتار ، وجد أن الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص + ١١ = ٠$ تحدد أحد ميادينها ، أوجد لأقرب متر مربع مساحة هذا الميدان. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «١١٠٠م٢»

---

٢ الملاحة البحرية : يقع رادار عند الموقع أ (٧ ، -٩) ويغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها يساوى ٣٠ وحدة طول. اكتب معادلة الدائرة التى تحد مجال عمل الرادار فى المستوى الإحداثى. هل يمكن للرادار رصد سفينة فى الموقع ب (٢٥ ، -٣٠) ؟ فسر إجابتك.

---

٣ التصميم المعمارى : صمم مهندس معمارى مبنى قاعدته على شكل ثمانى منتظم ، تمر برؤوسه الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ١٢ ص - ٦٠ = ٠$

احسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب وحدة مربعة. «$٢٠٠\sqrt{٢}$ وحدة مربعة»

٤ **الربط بالصناعة : يوضح الشكل المقابل**

بكرة أ فى آلة تمس محورى الإحداثيات ، تدور بواسطة سير ، يمر على بكرة صغيرة ب معادلة دائرتها : $س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ س + ٤٥ = ٠$.

أوجد :

(١) معادلة دائرة البكرة أ إذا كان طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

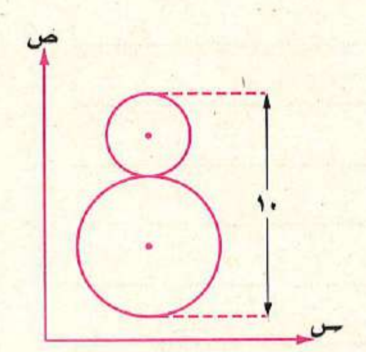
(٢) البعد بين مركزى البكرتين إذا كان كل وحدة من المستوى الإحداثى تمثل ٦ سم «٧٨ سم»

---

٥ **الصناعة : يبين الشكل المقابل**

ترسين فى آلة مركزاهما يقعان على مستقيم يوازى محور الصادات وأقصى بعد بين حافتيهما ١٠ وحدات.

أوجد معادلة الترس الأصغر علمًا بأن معادلة الترس الأكبر هى : $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ س - ٨ ص + ٣٢ = ٠$.



تطبيقات الرياضيات

الجزء الخاص بالامتحانات



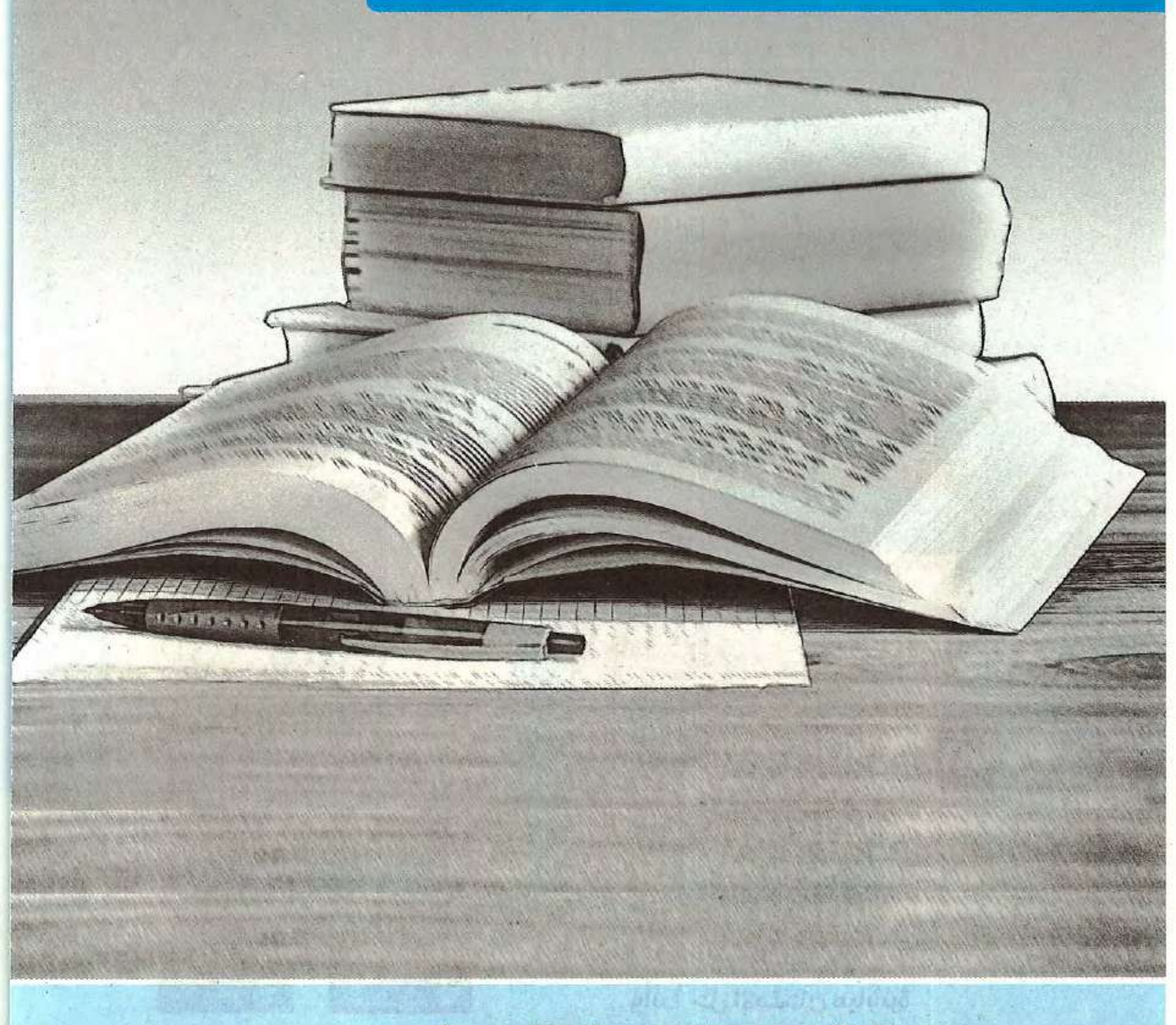
- اختبارات تراكمية
- اختبارات شهرية
- امتحانات نهائية

المعاصر 2024

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

محتويات الكتاب



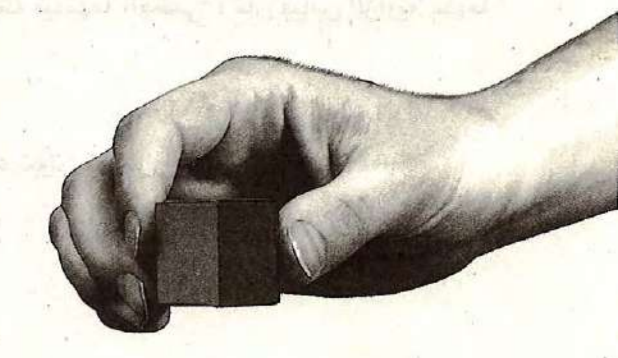
- الاختبارات التراكمية القصيرة.
- الاختبارات الشهرية.
- امتحانات الكتاب المدرسى.
- الامتحانات النهائية.
- الإجابات.

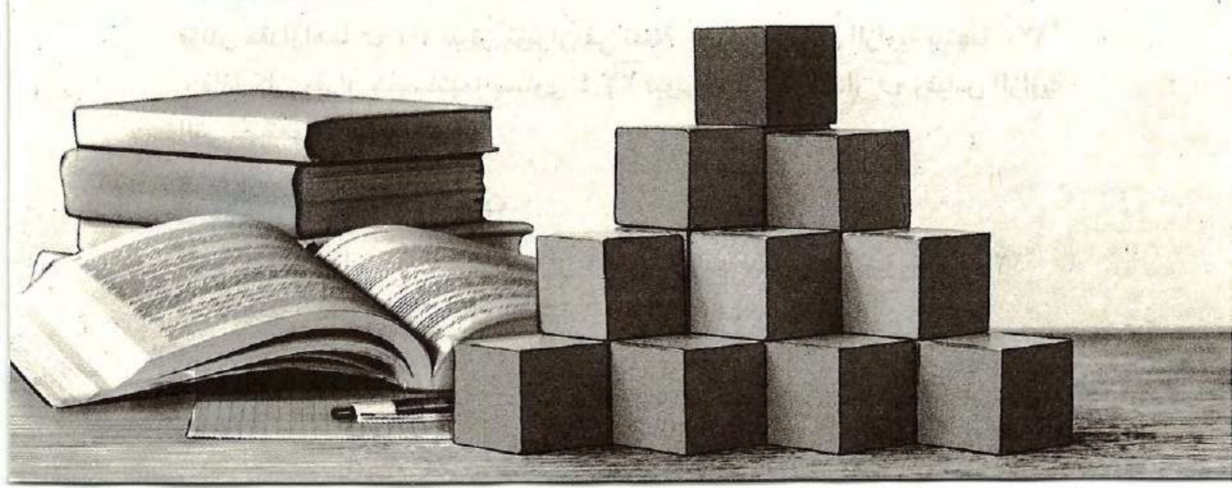
الاختبارات التراكمية القصيرة



أولًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى الاستاتيكا.

ثانيًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى الهندسة والقياس.





الدرجة الكلية
....
١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ حيث $ق_١$ ، $ق_٢$ مقيسة بالنيوتن فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٣}$ (د) ٥

(٢) قوتان متساويتان فى المقدار تؤثران فى نقطة وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$ ومقدار محصلتهما ٣ نيوتن فإن مقدار كل منهما .... بالنيوتن.

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٣ $\sqrt{٣}$

(٣) إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتهما العظمى ، فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

(٤) مقدار محصلة قوتين مقداراهما ٣ ، ٥ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

السؤال الثانى ٣ درجات

قوتان مقداراهما ق ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، فأوجد مقدار $\overrightarrow{ق}$ وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overrightarrow{ق}$

السؤال الثالث ٣ درجات

قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى. **أوجد قيمة : ق**

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 2 على درس 2,1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٣ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق ، فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ٢٠° (د) ١٨٠°

(٢) حللت القوة $\overline{ح}$ إلى قوتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ وتصنعان مع $\overline{ح}$ زاويتين قياساهما $هـ_١$ ، $هـ_٢$ من جهتيها على الترتيب فإن مقدار $\overline{ق_١}$ هو ....

(أ) $\frac{ح \, جا هـ_٢}{جا (هـ_١ + هـ_٢)}$ (ب) $\frac{ح \, جا هـ_٢}{جا (هـ_١ - هـ_٢)}$

(جـ) $\frac{ح \, جا هـ_١}{جا (هـ_١ + هـ_٢)}$ (د) $\frac{ح \, جا (هـ_١ + هـ_٢)}{جا هـ_٢}$

(٣) قوتان متساويتان فى المقدار ، قياس الزاوية بينهما ٩٠° ومقدار محصلتهما يساوى ٨ نيوتن ، فإن مقدار كل منهما بوحدة النيوتن ....

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) $٤\sqrt{٢}$ (د) ٨

(٤) فى الشكل الموضح :

$ق_١$ = ...

(أ) ١٢ جتا ٧٥° (ب) ١٢ جتا ٤٥°

(جـ) ٦ $\sqrt{٢}$ ٤٥° (د) ٦ $\sqrt{٢}$ ٧٥°

ح = ١٢ ، ق١ ، ق٢ ، ٣٠° ، ٤٥°

السؤال الثانى ٣ درجات

قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإذا كان اتجاه محصلتهما يميل على القوة ق بزاوية قياسها ٤٥° ، أوجد ق ، ومقدار محصلتهما.

السؤال الثالث ٣ درجات

حلل قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن فى اتجاهين ، أحدهما يميل على القوة بزاوية قياسها ٦٠° ، والآخر يميل بزاوية قياسها ٣٠° من الناحية الأخرى.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 3 من درس 1 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية هـ فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى تساوى ....

(أ) و جتا هـ (ب) و جا هـ (جـ) و ظا هـ (د) و

(٢) قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ١٧ (ب) ٧ (جـ) ١٣ (د) ١٤

(٣) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = أ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ − ب $\overleftarrow{ص}$ ومحصلتهم $\overleftarrow{ح}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) −١

(٤) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٧ $\overleftarrow{س}$ − ٥ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ح}$ محصلتهما فإن : $\|\overleftarrow{ح}\|$ = ...

(أ) $\sqrt{٥} + \sqrt{٧٤}$ (ب) ٤٩ (جـ) ١٣ (د) $\sqrt{١٢} - \sqrt{٥}$

السؤال الثانى ٣ درجات

ثلاث قوى مستوية مقاديرها : ٨٥ ، ٧٥ ، ٥٠ $\sqrt{٢}$ ث.كجم تؤثر فى نقطة مادية الأولى فى اتجاه الشرق والثانية فى اتجاه ٣٠° غرب الشمال والثالثة فى اتجاه الجنوب الغربى.
أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

السؤال الثالث ٣ درجات

قوتان تؤثران فى نقطة مادية ، فإذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما ٣٢ ث.كجم ، وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما ١٢ ث. كجم ، أوجد مقدار كل من القوتين ، ثم أوجد مقدار محصلتهما إذا كان قياس الزاوية بين القوتين = ٦٠°

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 4 من درس 1 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٤ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين = ...

(أ) 60° (ب) 90° (جـ) 120° (د) 150°

(٢) القيمة العظمى والقيمة الصغرى على الترتيب لمحصلة القوتين ٨ ، ١٣ نيوتن هما .... نيوتن.

(أ) ١٣ ، ٨ (ب) ١٣ ، ٥ (جـ) ٢١ ، ٨ (د) ٢١ ، ٥

(٣) قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما 60° فإن مقدار محصلتهما ح يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٥

(٤) قوتان متساويتان في المقدار ومقدار محصلتهما ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ فإن مقدار كل منهما .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) $3\sqrt{3}$

السؤال الثاني **٣ درجات**

وضع جسم وزنه ٣٠٠ ث.جم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومُنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها 30° إلى أعلى ، أوجد مقدار القوة ومقدار رد فعل المستوى.

السؤال الثالث **٣ درجات**

إذا كان $\overrightarrow{ق_1} = ٥\,\overrightarrow{س} + ٣\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = أ\,\overrightarrow{س} + ٦\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = -١٤\,\overrightarrow{س} + ب\,\overrightarrow{ص}$

ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة وكانت المحصلة $\overrightarrow{ح} = \left(10\sqrt{2} ، \frac{3}{4}\pi\right)$

فأوجد قيمتي : أ ، ب

الدرجة الكلية

١٠

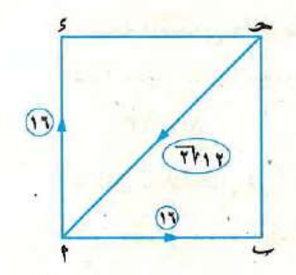
اختبار 5 من درس 1 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٢ درجة

قوتان مقداراهما : ق ، ق $\sqrt{2}$ نيوتن ، تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد قياس الزاوية بين القوتين ، وأثبت أن مقدار محصلتهما يساوى ق

السؤال الثانى ٢ درجة



الشكل المقابل يمثل القوى : ١٦ ، ١٦ ، ١٢ $\sqrt{2}$ نيوتن

، والتى تؤثر فى المربع أ ب حـ ء فى الاتجاهات

$\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـأ}}$ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

السؤال الثالث ٤ درجات

كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ ث.جم وطول نصف قطرها ٣٠ سم ، علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٣٠ سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس.

أوجد فى وضع التوازن كلًا من :

الشد فى الخيط ورد فعل الحائط على الكرة.

السؤال الرابع ٢ درجة

ثلاث قوى مستوية مقاديرها : ٥ ، ١٠ ، ٤ $\sqrt{7}$ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية يساوى 60° فأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة القوى الثلاث.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٥ درجات *كل جزئية درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

(٢) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) عدد لا نهائى.

(٣) المستقيمان المتخالفان ....

(أ) لا يتقاطعان. (ب) لا يتعامدان.

(جـ) لا يتوازيان. (د) لا يتقاطعان ولا يتوازيان.

(٤) فى الشكل المقابل :

المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) {أ} (ب) المستقيم ل

(جـ) $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(٥) إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س فإن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ س = ...

(أ) $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ (جـ) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (د) ∅

السؤال الثانى ٥ درجات *كل جزئية درجة*

باستخدام الشكل المقابل اذكر :

(١) مستويان متوازيان. (٢) مستويان متقاطعان.

(٣) مستقيمان متخالفان. (٤) مستقيم ومستوى متوازيان.

(٥) خط تقاطع المستوى أ ب بَ أَ مع المستوى أ حـ ء

الدرجة الكلية
١٠

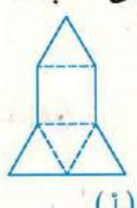
اختبار 2 على درس 2,1 من الوحدة الثانية

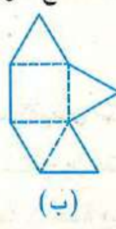
أجب عن الأسئلة الآتية :

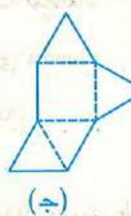
السؤال الأول ٤ درجات *كل جزئية درجة*

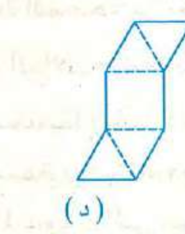
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أي الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٢) إذا كان حجم هرم رباعي منتظم ١٢ سم^3 وارتفاعه ٤ سم فإن طول حرف قاعدته .... سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبي ١٣ سم فإن حجمه يساوي بوحدة سم^3 ....

(أ) $\frac{١}{٣} \times (١٠)^2 \times ١٣$ (ب) $\frac{١}{٣} \times (١٠)^2 \times ١٢$

(جـ) $\frac{١}{٣} \times (١٢)^2 \times ١٣$ (د) $\frac{١}{٣} \times (١٣)^2 \times ١٠$

(٤) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الوجوه يساوي ١٨ سم فإن مساحته الكلية = ... سم^2

(أ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٤}$ (ب) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $٩\sqrt{٣}$

السؤال الثاني ٣ درجات *كل جزئية درجة ونصف*

هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه $١٠\sqrt{٣}$ سم **أوجد :**

(١) المساحة الجانبية. (٢) حجم الهرم.

السؤال الثالث ٣ درجات

هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبي $١٠\sqrt{٣}$ سم أوجد مساحته الكلية.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 3 من درس 1 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٤ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم

وارتفاعه ٨ سم تساوى .... سم^2.

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

(٢) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، ارتفاعه الجانبى ١٣ سم

فإن مساحته الجانبية = ...

(أ) ٢٦٠ سم^2 (ب) ٣٦٠ سم^2 (جـ) ١٣٠ سم^2 (د) ٥٢٠ سم^2

(٣) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٤) حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم^3

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

السؤال الثانى **٣ درجات**

هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^3 ،

فأوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية.

السؤال الثالث **٣ درجات**

أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم^2

وطول راسمه ٣٠ سم

الدرجة الكلية



اختبار 4 من درس 1 حتى درس 4 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٤ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مركز الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص =$ صفر هو النقطة ....

(أ) (٣ ، –٤) (ب) (٤ ، –٣) (جـ) (–٣ ، ٤) (د) (–٤ ، ٣)

(٢) محيط الدائرة التى معادلتها : $(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$
يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

(٣) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم
وارتفاعه ٨ سم تساوى .... $سم^٢$.

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

(٤) النقطة التى تقع على الدائرة : $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، –٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

السؤال الثانى **٣ درجات**

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها م (–٢ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢)

السؤال الثالث **٣ درجات**

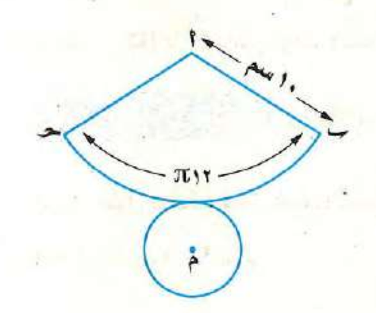
الشكل المقابل يمثل شبكة مجسم حيث

طول $\overset{\frown}{ب جـ}$ = ١٢ π سم

، أ ب = ١٠ سم احسب :

(١) المساحة الكلية لهذا المجسم.

(٢) حجم المجسم.



الاختبـارات الشهرية



أولًا : نماذج اختبارات شهر أكتوبر.

ثانيًا : نماذج اختبارات شهر نوفمبر.

محتوى امتحان شهر أكتوبـر

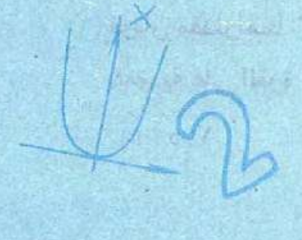
من درس : القوى - محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة (فى الاستاتيكا).

حتى نهاية الدرس : محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة (فى الاستاتيكا).

محتوى امتحان شهر نوفمبر

من درس : اتزان جسم تحت تأثير قوتين / ثلاث قوى متلاقية فى نقطة (فى الاستاتيكا).

حتى نهاية درس : المساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط. (فى الهندسة)





الدرجة
١٠

اختبـار ١

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٦ درجات)

(١) أثرت قوتان مقداراهما ٨ ، ١٦ ث.كجم وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° على جسم ساكن فحركته فإن الجسم يتحرك فى اتجاه يصنع زاوية قياسها .... مع القوة الصغرى.

(أ) ٣٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٦٠° (د) ٤٥°

(٢) قوتان متساويتان فى المقدار متلاقيتان فى نقطة بينهما زاوية قياسها ١٢٠° ومقدار كل منهما ٦ نيوتن فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ (د) ١٢ $\sqrt{٣}$

(٣) قوتان مقداراهما ق ، ك نيوتن حيث ق > ك وكانت أصغر وأكبر قيمة لمحصلتهما ٥ ، ٩ نيوتن على الترتيب فإن : ٥ ق – ٢ ك = ... نيوتن.

(أ) ٥٣ (ب) ٣١ (جـ) ٤٩ (د) ٤

(٤) وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، فإن مركبة الوزن فى اتجاه عمودى على المستوى = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٢}$ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

(٥) أثرت القوى ٨ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة فى اتجاه دورى واحد فإن مقدار محصلة القوى = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٧

(٦) قوتان مقداراهما ٣ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{٢\pi}{٣}$ إذا كانت محصلتيهما عمودية على القوة الأولى فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt[٣]{٢}$ (د) ٦

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) قوة مقدارها ١٨ نيوتن تعمل فى اتجاه الجنوب.

أوجد مركبتيها فى اتجاهى ٦٠° شرق الجنوب ، ٣٠° غرب الجنوب. (درجتان)

(٢) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ١ ، ٢ ، $\sqrt{3}$ نيوتن تؤثر فى نقطة م واتجاهاتها هى $\overleftrightarrow{م أ}$ ، $\overleftrightarrow{م ب}$ ، $\overleftrightarrow{م حـ}$ على الترتيب حيث ق(∠أ م ب) = ٦٠° ، ق(∠ب م حـ) = ٣٠° ، ق(∠أ م حـ) = ٩٠°

أوجد المحصلة. (درجتان)

اختبار ٢



١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٦ درجات)

(١) قوتان ٦ ، ٨ نيوتن ومحصلتهما ١٠ نيوتن يكون قياس الزاوية بين اتجاهيهما = ... °

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

(٢) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٧ ، ق نيوتن والمحصلة تنصف الزاوية بينهما فإن (ق − ١) = ...

(أ) ٨ نيوتن. (ب) ٧ نيوتن. (جـ) ٦ نيوتن. (د) ٥ نيوتن.

(٣) فى الشكل المقابل :

إذا حللنا القوة $\overleftarrow{ح}$ إلى المركبتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$

فإن : $ق_1$ = ... نيوتن.

(أ) ١٢ حا ٧٥° (ب) ١٢ حا ٤٥°

(جـ) ٦ قا ٤٥° (د) ٦ قا ٧٥°

(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كانت محصلة القوى المبينة تؤثر فى محور الصادات

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٦

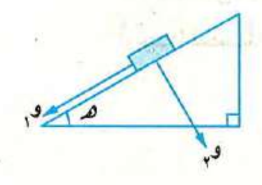
(جـ) ٨ (د) ١٤

(٥) قوتان مقداراهما ٥ نيوتن ، ١٠ نيوتن ومحصلتهما عمودية على القوة الصغرى وقياس الزاوية بينهما = ى ، ومقدار محصلتهما = ح فإن : ....

(أ) ى = ٦٠° ، ح = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن. (ب) ى = ١٢٠° ، ح = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

(جـ) ى = ٦٠° ، ح = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن. (د) ى = ١٢٠° ، ح = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

(٦) فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ٢٦٠ ث.جم ، ظا هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ، و$_١$ ، و$_٢$ هما مقدارا مركبتا الوزن فى اتجاه المستوى المائل لأسفل واتجاه العمودى عليه فإن ....

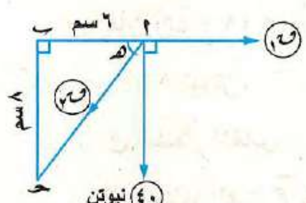
(أ) و$_١$ = ١٢٠ ث.جم ، و$_٢$ = ٥٠ ث.جم (ب) و$_١$ = ٢٦٠ ث.جم ، و$_٢$ = ٦٥ ث.جم

(جـ) و$_١$ − و$_٢$ = ٧٠ ث.جم (د) و$_١$ + و$_٢$ = ٣٤٠ ث.جم

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) حللت القوة التى مقدارها ٤٠ نيوتن إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ كما هو موضح بالرسم.
أوجد مقدارى المركبتين ق$_١$ ، ق$_٢$



(درجتان)

(٢) ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية الأولى نحو الشرق ، والثانية تصنع زاوية ٣٠° غرب الشمال ، والثالثة تصنع ٦٠° جنوب الغرب.
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. (درجتان)

الدرجة
......
١٠

اختبـــار ١

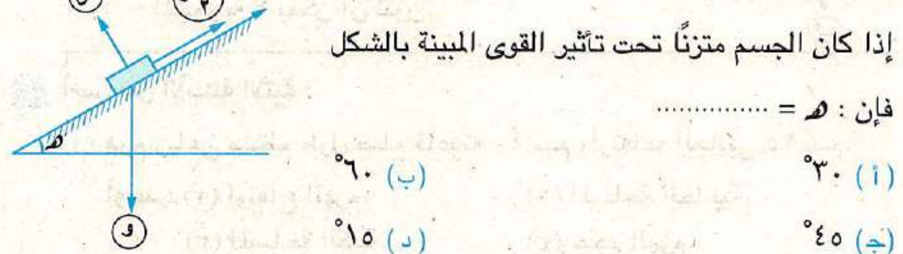
١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٦ درجات)

(١) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية ٩٠ π سم^2

فإن حجمه = ... سم^3

(أ) ١٠٥ π (ب) ٩٥ π (جـ) ١٠٠ π (د) ١٢٠ π

(٢) فى الشكل المقابل :



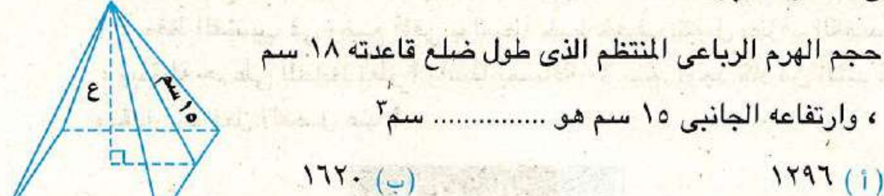
إذا كان الجسم متزنًا تحت تأثير القوى المبينة بالشكل

فإن : هـ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥° (د) ١٥°

(٣) فى الشكل المقابل :



حجم الهرم الرباعى المنتظم الذى طول ضلع قاعدته ١٨ سم

، وارتفاعه الجانبى ١٥ سم هو .... سم^3

(أ) ١٢٩٦ (ب) ١٦٢٠

(جـ) ٥٤٠ (د) ١٩٤٤

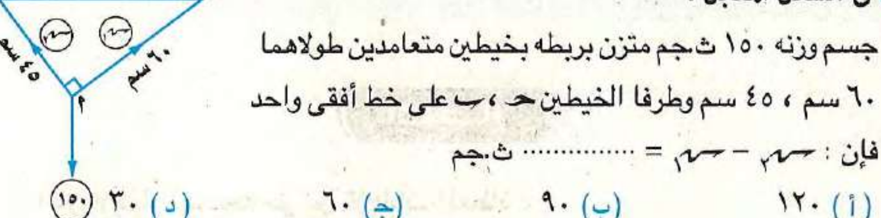
(٤) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستوى واحد فقط.

(ب) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ تعين مستوى.

(جـ) رؤوس المثلث تعين مستوى.

(د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد فقط.

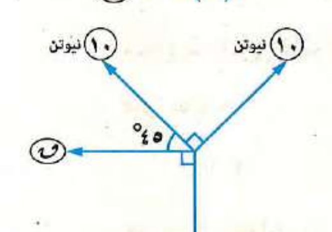


(٥) في الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقى واحد

فإن : $ش_٢ - ش_١$ = ... ث.جم

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠



(٦) شرط اتزان مجموعة القوى المقابلة هو ....

(أ) ق = ١٠ نيوتن.

(ب) ق = ١٠ $\sqrt{2}$ نيوتن.

(جـ) ق = ٥ $\sqrt{2}$ نيوتن.

(د) المجموعة لا يمكن أن تتزن.

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه الجانبى ٢٥ سم.

أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) المساحة الجانبية.

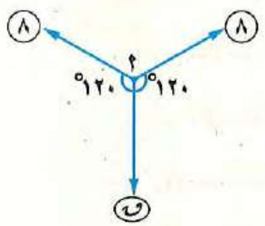
(٣) المساحة الكلية. (٤) حجم الهرم. (درجتان)

(٢) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ ، حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند ب ، وبنقطة حـ على الحائط تعلو أ رأسيًا بمسافة ٦٠ سم. أوجد كلاً من الشد فى الخيط ومقدار رد فعل المفصل عند أ (درجتان)

اختبـــار ٢

الدرجة
....
١٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (٦ درجات)



(١) في الشكل المقابل :

أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاثة الموضحة بالشكل حيث ق تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠°

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا ١٢٠°

(٢) هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠ سم^{٣} وارتفاعه ١٢ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٢٤٠ (ب) ٢٦٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٣٦٠

(٣) مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية ....

(أ) ٤ π نق^{٢} (ب) ٣ π نق^{٢} (جـ) ٣ π نق^{٣} (د) ٤ π نق^{٣}

(٤) أى ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين ....

(أ) مستوى واحدًا. (ب) مستويين. (جـ) ٣ مستويات. (د) ٤ مستويات.

(٥) وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى فإن مقدار وزن الجسم = ... نيوتن.

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٧٢ (د) ٣٦ $\sqrt{٣}$

(٦) علق ثقل مقداره ٣٢ نيوتن فى طرف خيط طوله ١٠ سم وثبت الطرف الآخر للخيط فى حائط رأسى ثم شد الثقل بقوة أفقية أبعدته عن الحائط فاتزن عندما كان الثقل يبعد عن الحائط مسافة ٦ سم. فإن مقدار القوة = ... نيوتن.

(أ) ٢٤ (ب) ٤٠ (جـ) ٣٦ (د) ٢٨

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) مخروط دائرى قائم مساحة قاعدته ٣٦ π سم^{٢} ، وطول راسمه ١٠ سم. (درجتان)

أوجد : (١) مساحته الجانبية. (٢) مساحته الكلية. (٣) حجمه.

(٢) علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين. (درجتان)



أولًا : امتحان الكتاب المدرسى.

ثانيًا : امتحانات بعض مدارس المحافظات.

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

أولًا امتحان الكتاب المدرسى

تم دمج أسئلة اختبارى الكتاب المدرسى الخاصة بمقرر الفصل الدراسى الأول فى اختبار واحد

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٣ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق ، فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر (ب) ٦٠° (جـ) ٢٠° (د) ١٨٠°

(٢) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

(٣) النقطة التى تقع على الدائرة : $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

(٤) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

فإن مقدار محصلتهما ح يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٥

---

٢ (أ) إذا كان : $\overline{ق_١} = ٥ \overline{س} + ٣ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = أ \overline{س} + ٦ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣} = -١٤ \overline{س} + ب \overline{ص}$

ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overline{ح} = (١٠\sqrt{٢} ، \frac{٣}{٤} \pi)$

فأوجد قيمتى : أ ، ب

(ب) وضع جسم وزنه ٣٠٠ ث.جم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومُنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى ، أوجد مقدار القوة ومقدار رد فعل المستوى.

٣ (أ) أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم.

(ب) كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ ث.جم وطول نصف قطرها ٣٠ سم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٣٠ سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس.

أوجد فى وضع التوازن كلًا من : الشد فى الخيط ورد فعل الحائط على الكرة.

---

٤ (أ) مكعب من الشمع طول حرفه ٣٠ سم حول إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤٥ سم ، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ٨ ٪ من الشمع قد فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل.

(ب) قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث.جم عُلِّق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين ، ثُبت طرفاهما فى نقطة واحدة ، فإذا كان طولا الخيطين : ٨٠ سم ، ٦٠ سم فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

---

٥ (أ) أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(ب) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم وزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف ، يتصل بطرف القضيب عند ب وبنقطة حـ على الحائط تعلو رأسيًا بمسافة ٤٠ سم أوجد كلًا من الشد ورد الفعل عند أ

ثانيًا امتحانات بعض مدارس المحافظات

١ إدارة روض الفرج التعليمية — محافظة القاهرة

اختبار تفاعلى ①

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى مجموعات القوى التالية لا يمكن أن تكون متزنه ؟

(أ) ٧ ، ٨ ، ١١ (ب) ٩ ، ٣ ، ١٥ (جـ) ١٢ ، ١٢ ، ٦ (د) ٤ ، ٦ ، ٨

② وضع جسم وزنه ٦ ثقل كجم على مستو مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ثم حفظ توازن الجسم بواسطة قوة أفقية فإن مقدار رد فعل المستوى = ... ثقل كجم.

(أ) ٤ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٨ $\sqrt{٣}$

③ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

④ يكون المستقيمان المتخالفان إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) لا يجمعهما مستوى. (د) غير منطبقين.

⑤ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٨ ، ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن ، وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٢ (د) ٢

⑥ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٤ ق ، ٦ ق فإن أكبر قيمة للمحصلة تساوى ....

(أ) ٨ ق (ب) ٢ ق (جـ) ١٠ ق (د) ٢٤ ق

⑦ قوة مقدارها ١٥٠ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال = ... نيوتن.

(أ) ١٥٠ (ب) ٧٥ (جـ) ٢٧٥ (د) ٢٥٠

⑧ هرم ثلاثى منتظم الوجوه إذا كان مجموع أطوال أحرفه يساوى ٣٦ سم يكون ارتفاعه = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) $٢\sqrt{٦}$ (د) $\sqrt{٦}$

⑨ الدائرة التى معادلتها : $(س - ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ١٠٠$ يكون محيطها يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٠ π (ب) ٢٠ π (جـ) ٣٠ π (د) ١٠٠ π

⑩ كرة متجانسة طول نصف قطرها ٦ سم وزنها ٢٤ نيوتن تستند على حائط رأسى أملس ربطت من نقطة على سطحها بخيط طوله ٤ سم وثبت الطرف الآخر للخيط فى نقطة على الحائط تقع رأسيًا فوق نقطة تماس الكرة مع الحائط. فإن : $\text{ش} - \text{ر}$ = ... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ١٨ (جـ) ٣٠ (د) ٤٨

⑪ قوتان مقداراهما ١٦ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الثانية فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

⑫ فى الشكل المقابل :

$ق_١$ = ...

(أ) ١٢ جتا ٧٥° (ب) ١٢ جتا ٤٥°

(جـ) ٦ قا ٧٥° (د) ٦ قتا ٧٥°

⑬ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١} = ٥ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = -٥ \overrightarrow{س} + ٧ \overrightarrow{ص}$ فإن : $\|\overrightarrow{ح}\|$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٥ (د) ٤٩

⑭ مخروط دائرى قائم طول راسمه ٥ سم وارتفاعه ٤ سم فإن حجمه = ... $سم^٣$.

(أ) ٣٦ π (ب) ١٥ π (جـ) ٢٤ π (د) ١٢ π

⑮ إذا كانت المعادلة : $٢ أ س^٢ + ٤ ص^٢ - ٢ س + (ب + ٥) س ص + ٨ ص + هـ + ٢ = ٠$ تمثل معادلة دائرة تمر بنقطة الأصل فإن : أ − ب + هـ = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ٢ (د) ٩

(١٦) شخص وزنه ٢٠ نيوتن يصعد على منحدر يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°
فإن مركبة الوزن فى اتجاه عمودى على المستوى = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) $٥\sqrt{٣}$ (د) $١٠\sqrt{٣}$

(١٧) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(١٨) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ٣٦٠ (ب) ٢٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

(١٩) فى الشكل المقابل :

الجسم متزن على مستوى مائل أملس

فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥°
(جـ) ٦٠° (د) ٧٥°

(٢٠) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مستطيل محصلة هذه القوى ....

(أ) $٦\sqrt{٢}$ (ب) $٢\sqrt{٥٨}$
(جـ) $٢\sqrt{٨٥}$ (د) $٦\sqrt{٥}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) يقع رادار عند الموقع أ (−٤ ، ٨) ويغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها = ٢٥ وحدة طول
اكتب معادلة الدائرة التى تحدد مجال عمل الرادار فى المستوى الإحداثى
هل يمكن للرادار رصد سفينة فى الموقع ب (٤ ، −١) ولماذا ؟

٢ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية الأولى نحو الشرق والثانية تصنع زاوية ٣٠° غرب الشمال والثالثة تصنع زاوية ٦٠° جنوب الغرب. **فأوجد مقدار المحصلة ؟**

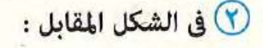




٢ إدارة ٦ أكتوبر التعليمية — محافظة الجيزة



اختبـــار تفاعلى ٢



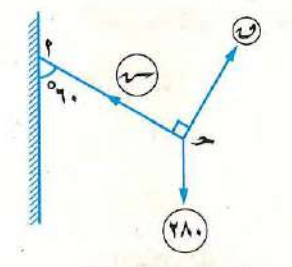
أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قوتان مقداراهما ٣ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر°　　(ب) ٦٠°　　(جـ) ٢٠°　　(د) ١٨٠°

② **فى الشكل المقابل :**



مصباح وزنه ٢٨٠ ث.جم معلق فى نهاية خيط اتزن بتأثير قوة عمودية على الخيط عندما يميل الخيط على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°

فإن : $\frac{ق}{ش}$ = ...

(أ) ٢　　(ب) $\frac{١}{٢}$　　(جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$　　(د) $\sqrt{٣}$

③ حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم^{٣}.

(أ) ٨١٠　　(ب) ١٨٠　　(جـ) ٣٦٠　　(د) ٢٧٠

④ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ حيث ٣ ≤ $ق_١$ ≤ ١٢ ، ٤ ≤ $ق_٢$ ≤ ١٦ ومقدار محصلتهما ح وقياس الزاوية بينهما ٩٠° فإن : ....

(أ) ٥ ≤ ح ≤ ٢٠　　(ب) ٧ ≤ ح ≤ ٢٨　　(جـ) ٠ ≤ ح ≤ ١٨　　(د) ١ ≤ ح ≤ ٤

⑤ قوتان متلاقيتان فى نقطة مادية مقداراهما ٢ ق − ٥ ، ٧ − ق فإذا كانت محصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ...

(أ) ٣٥　　(ب) ٢٥　　(جـ) ٧　　(د) ٤

(٦) المستقيمان المتخالفان ....

(أ) لا يتقاطعان. (ب) لا يتعامدان.

(جـ) لا يتوازيان. (د) لا يتقاطعان ولا يتوازيان.

(٧) إذا كانت : $\overleftarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) $٧\sqrt{٢}$

(٨) إذا أثرت القوى : $\overleftarrow{ق_١} = ٤\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = أ\overleftarrow{س} - ٧\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_٣} = ٣\overleftarrow{س} + ب\overleftarrow{ص}$ في نقطة مادية وكانت القوى متزنة

فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٣

(٩) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم

تساوى .... سم^٢.

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

(١٠) الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا

، حجمه = ... سم^٣.

(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π

(جـ) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

(١١) حللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن

إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تصنعان معها زاويتين

قياساهما ٣٠° ، ٩٠° على الترتيب كما بالشكل المقابل

فإن : ق$_٢$ = ... نيوتن.



(أ) ١٠ (ب) $١٠\sqrt{٣}$

(جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $٤\sqrt{٣}$

(١٢) النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه وارتفاعه = ...

(أ) $\sqrt{٢} : \sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣} : ٢$ (جـ) $\sqrt{٦} : ٢$ (د) $\sqrt{٣} : ٣$

(١٣) ثلاث قوى متساوية المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(١٤) فى الشكل المقابل :

إذا كانت الكرة فى وضع توازن

فإن : (سـ ، ى) = ...

(أ) (٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن)

(ب) (٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن)

(جـ) (١٢ نيوتن ، ٨ نيوتن)

(د) (٤ نيوتن ، ٨ نيوتن)

(١٥) إذا كانت المعادلة (س ص ٢٥) $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٤ \end{pmatrix}$ = ▭ تمثل معادلة دائرة

فإن طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠

(١٦) إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل

تؤثر فى محور السينات

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٤

(جـ) ١٨ (د) ٦

(١٧) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها (θ)

فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى = ...

(أ) و (ب) و جا θ (جـ) و جتا θ (د) و ظا θ

(١٨) الشكل المقابل يمثل ثلاث قوى

$\overline{ق}_١$ ، $\overline{ق}_٢$ ، $\overline{ق}_٣$ مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٢ نيوتن

على الترتيب فإذا كانت : جا θ = $\frac{٣}{٥}$

فإن مقدار محصلة هذه القوى = ... نيوتن.

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٥

(١٩) وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ على حالة توازن بواسطة قوة أفقية.

فإن مقدار القوة الأفقية = ... نيوتن.

(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠ (جـ) $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ (د) ١٥٠

(٢٠) محيط الدائرة التى معادلتها : $(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$

يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٤٠ سم ووزنه ٤٨٠ ث.جم يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى. أثرت فى طرفه الآخر ب القوة $\overleftarrow{ق}$ فى الاتجاه الأفقى فاتزن القضيب فى وضع يكون فيه مائلًا على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار القوة $\overleftarrow{ق}$ ومقدار واتجاه رد فعل المفصل عند أ

---

(٢) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان :

مركزها م (-٢ ، ٣) وطول قطرها ٨ وحدات طولية.



٣ إدارة وسط التعليمية محافظة الإسكندرية



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان مقداراهما ٦ ، ١٠ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بين اتجاهيهما يساوى ٦٠° فإن مقدار محصلتهما يساوى .... نيوتن.

(أ) ١٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٩

② قوتان مقداراهما ق ، ك وقياس الزاوية بينهما ي ومحصلتهما $ح_1$ وقوتان مقداراهما ٢ ق ، ٢ ك وقياس الزاوية بينهما ي ومحصلتهما $ح_2$ فإن : ....

(أ) $ح_1 = ح_2$ (ب) $ح_1 = ٢ ح_2$ (جـ) $ح_2 = ٢ ح_1$ (د) $ح_1 = ٤ ح_2$

③ إذا كانت القوتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ متضادتان فى الاتجاه ، فإن متجه محصلتهما يساوى ....

(أ) $ق_1 + ق_2$ (ب) $\overleftarrow{ق_1} - \overleftarrow{ق_2}$ (جـ) $ق_1 - ق_2$ (د) $\overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2}$

④ وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° حلل الوزن إلى مركبتين متعامدتين إحداهما فى اتجاه المستوى المائل. فإن مركبة وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى تساوى .... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) $٣\sqrt{٣}$

⑤ إذا حللت القوة $\overleftarrow{ح}$ إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$

اللتين تصنعان معها زاويتين قياسيهما ٣٠° ، ٤٥°

من جهتيها وكان $\| \overleftarrow{ح} \|$ = ١٢ نيوتن

فإن : $ق_1$ = ... نيوتن

، $ق_2$ = ... نيوتن على الترتيب.

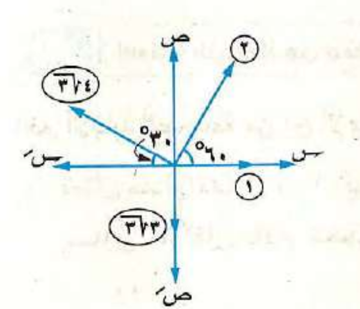
(أ) ٨,٨ ، ٦,٢ (ب) ٦,٢ ، ٨,٨ (جـ) ٨,٨ ، ٩,٢ (د) ٩,٢ ، ٨,٨

⑥ إذا كانت القوى $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ − ٨ $\overleftarrow{ص}$ ، وكانت محصلة القوتين هى $\overleftarrow{ح}$ = ٢ أ $\overleftarrow{س}$ − ٣ ب $\overleftarrow{ص}$

فإن : أ = ... ، ب = ... على الترتيب.

(أ) ٤ ، ٣ (ب) ٣ ، −٤ (جـ) −٣ ، ٤ (د) ٣ ، ٤

⑦ فى الشكل المقابل :



إذا كانت محصلة القوى هى

$\overleftarrow{ح}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$

فإن : أ = ...

(أ) −٤ (ب) صفر

(جـ) ٣ (د) ٤

(٨) إذا كانت القوتان $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ محصلتهما $\overline{ح}$ وكانت قياس الزاوية بين القوتان هى θ وقياس الزاوية بين القوة الأولى والمحصلة هى $\frac{\theta}{2}$ فأى مما يأتى صحيح ....

(أ) $ق_1 = 2\, ق_2$ (ب) $ق_2 = 2\, ق_1$ (جـ) $ق_1 \times ق_2 = 1$ (د) $ق_1 = ق_2$

(٩) إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع القوتين المتعامدتين التى مقدار كل منها ١٢ ، ٥ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١٧ (ب) ١٣ (جـ) ٧ (د) ٥

(١٠) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى ....

(أ) متعامدة. (ب) متقاطعة فى نقطة.

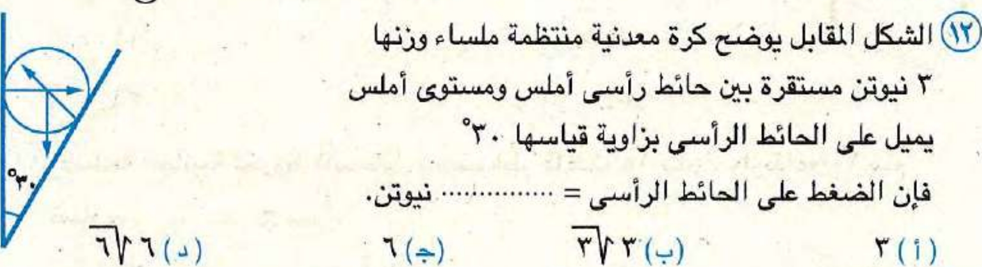
(جـ) توازى محور السينات. (د) توازى محور الصادات.

(١١) فى الشكل المقابل :

إذا كانت القوى متزنة فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠

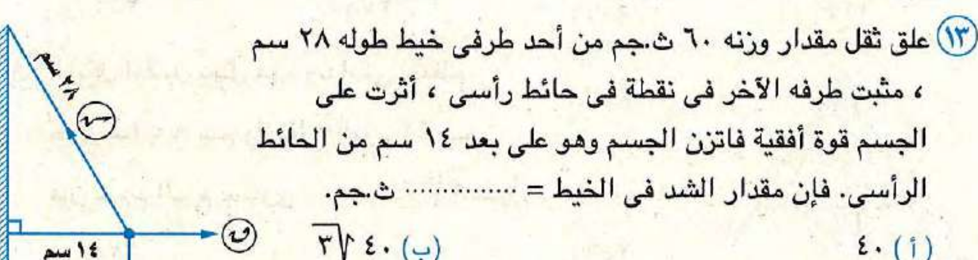
(جـ) $120\sqrt{3}$ (د) $40\sqrt{3}$



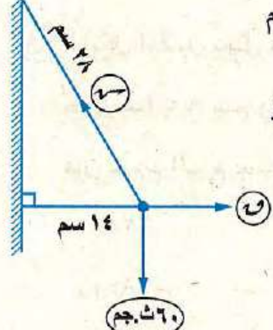
(١٢) الشكل المقابل يوضح كرة معدنية منتظمة ملساء وزنها ٣ نيوتن مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى أملس يميل على الحائط الرأسى بزاوية قياسها 30°

فإن الضغط على الحائط الرأسى = ... نيوتن.

(أ) ٣ (ب) $3\sqrt{3}$ (جـ) ٦ (د) $6\sqrt{6}$



(١٣) علق ثقل مقدار وزنه ٦٠ ث.جم من أحد طرفى خيط طوله ٢٨ سم ، مثبت طرفه الآخر فى نقطة فى حائط رأسى ، أثرت على الجسم قوة أفقية فاتزن الجسم وهو على بعد ١٤ سم من الحائط الرأسى. فإن مقدار الشد فى الخيط = ... ث.جم.



(أ) ٤٠ (ب) $40\sqrt{3}$

(جـ) ٢٠ (د) $20\sqrt{3}$

(١٤) أى مما يأتى لا يحدد مستوى ....

(أ) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة. (ب) مستقيم ونقطة تنتمى إليه.

(جـ) مستقيمان متوازيان. (د) مستقيمان متقاطعان.

(١٥) فى الشكل المقابل :

عدد المستقيمات المتخالفة مع المستقيم $\overleftrightarrow{أأ'}$ ....

(أ) صفر (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤ .

(١٦) فى الهرم المنتظم ، إذا كان أ = طول الحرف الجانبى ، ب = ارتفاع الهرم ، حـ = الارتفاع الجانبى. فإن ....

(أ) أ > ب > حـ (ب) أ > حـ > ب

(جـ) ب > أ > حـ (د) ب > حـ > أ

(١٧) الشكل المقابل يمثل شبكة هرم منتظم

فإن المساحة الجانبية للهرم تساوى .... سم^2

(أ) ١٢٠ (ب) ٢٤٠

(جـ) ٢٦٠ (د) ٣٤٠

(١٨) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم ، وارتفاعه ٢٠ سم تساوى .... π سم^2.

(أ) ٣٠٠ (ب) ٣٧٥ (جـ) ٥٠٠ (د) ٦٢٥

(١٩) الشكل المقابل يمثل هرم سداسى منتظم

طول ضلعه ٨ سم وارتفاع الهرم ١٢ سم

فإن حجم الهرم يساوى .... $\sqrt{3}$ سم^3.

(أ) ١٢٨ (ب) ٢٥٦

(جـ) ٣٨٤ (د) ٤٢٠

(٢٠) معادلة الدائرة التى $\overline{\text{أب}}$ قطر فيها حيث : أ (٢ ، −٧) ، ب (٦ ، ٥) ....

(أ) (س − ٤)^{2} + (ص + ١)^{2} = ٤٠ (ب) (س)^{2} + (ص + ١)^{2} = ٤٠

(جـ) (س − ٤)^{2} + (ص − ١)^{2} = ٥٠ (د) (س − ٤)^{2} + (ص + ١)^{2} = ٥٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ قوتان مقداراهما ق ، ق$\sqrt{2}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى. **أوجد قياس الزاوية بين القوتين.**

---

٢ أوجد بالخطوات المعادلة العامة للدائرة التى مركزها النقطة م (٧ ، −٥) ، وتمر بالنقطة أ (٣ ، ٢)



٤ إدارة القناطر الخيرية التعليمية — محافظة القليوبية



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان مقداراهما ٣ ، ٥ نيوتن ومقدار محصلتهما ٧ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(٢) جسم وزنه ٨ نيوتن موضوع على مستوى مائل أملس يميل على الأفقية بزاوية قياسها ٣٠° فإن مركبة الوزن فى اتجاه المستوى = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٨$\sqrt{3}$ (جـ) ٤ (د) ٤$\sqrt{3}$

(٣) جسم وزنه (و) نيوتن متزن على مستوى مائل أملس بربطه بخيط يمر على بكرة ملساء مثبتة عند قمة المستوى ويحمل الخيط فى طرفه الآخر جسم وزنه ٨ نيوتن.

فإن : و = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ١٦

④ إذا كان مقدار محصلة قوتين هو ح حيث ح ∈ [٣ ، ٩]

فإن مقدار القوة الكبرى = ...

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٣

⑤ إذا كان : $\overline{ق_1}$ = م $\overline{س}$ + $\sqrt{٣}$ ك $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2}$ = $\overline{س}$ + $\sqrt{٣}$ $\overline{ص}$ ،

محصلتهما $\overline{ح}$ = $\left(١٢ ، \frac{\pi}{٣}\right)$ فإن : م + ك = ...

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ٨ (د) ٥

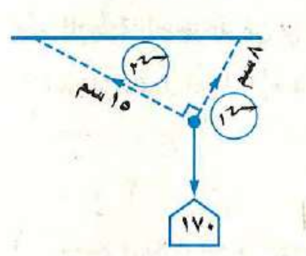
⑥ قوتان متساويتان في المقدار ومقدار محصلتهما ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن وتميل على إحدى القوتين بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار كل قوة تساوى .... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

⑦ ازيحت كرة بندول وزنها ٣٠٠ ث.جم بواسطة قوة أفقية فاتزنت عندما صنع الخيط مع الرأسى زاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار القوة = ... ث.جم.

(أ) ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٠٠ (جـ) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ (د) ١٥٠

⑧ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٧٠ نيوتن معلق بخيطين متعامدين

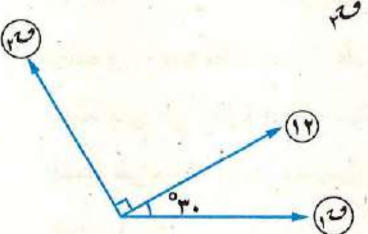
فإن : (ش١ ، ش٢) = ... نيوتن.

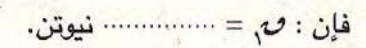
(أ) (١٥٠ ، ٨٠) (ب) (٨٠ ، ١٥٠)

(جـ) (٧٠ ، ٨٠) (د) (٨٠ ، ٧٠)

⑨ حللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين ق١ ، ق٢

ويصنعان معها زاويتين قياسهما ٣٠° ، ٩٠°




فإن : ق١ = ... نيوتن.

(أ) ٤ $\sqrt{٣}$ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٨ $\sqrt{٣}$ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

(١٠) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل محصلة القوى

المبينة بالشكل تصنع مع $\overline{أ ب}$

زاوية قياسها ....

(أ) $30°$ (ب) $حا^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

(جـ) $60°$ (د) $45°$

(١١) قوتان مقدارهما (٢ ق – ١) ، (٣ – ٢ ق) نيوتن ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

(١٢) إذا كان : $\overline{ق_1}$ = ٥ $\overline{س}$ + ٧ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2}$ = ٥ $\overline{ص}$ ومحصلتهما $\overline{ح}$

فإن : ‖$\overline{ح}$‖ = ... وحدة قوة.

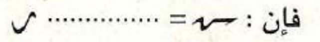
(أ) ١٧ (ب) ١٣ (جـ) ٧ (د) ١٠

(١٣) في الشكل المقابل :

كرة وزنها $30\sqrt{3}$ نيوتن معلقة بخيط ($\overline{أ حـ}$) من نقطة

على سطحها ومتزنة باستنادها على حائط رأسى أملس

فإذا كان طول الخيط = طول نصف قطر الكرة



فإن : ش = ... ر

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{5}$

(١٤) إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) {أ} (ب) ∅ (جـ) س (د) ل

(١٥) هرم رباعى منتظم ارتفاعه الجانبى ١٣ سم ومساحة قاعدته ١٠٠ سم^2

يكون حجمه = ... سم^3.

(أ) ٣٦٠ (ب) ٤٠٠ (جـ) ١٣٠٠ (د) ١٣٠

(١٦) محيط الدائرة التى معادلتها : $س^٢ + ص^٢ + ٢ س - ٤٨ = ٠$ يساوى .... π وحدة طول.

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ٢٢

(١٧) هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ١٥ سم يكون ارتفاعه = ... سم.

(أ) $٤\sqrt{٥}$ (ب) $٥\sqrt{٦}$ (جـ) $٦\sqrt{٥}$ (د) $٥\sqrt{٥}$

(١٨) معادلة الدائرة التى مركزها (-٣ ، ١) وتمس المستقيم س = ١ هى ....

(أ) $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١٦$ (ب) $(س + ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ٨$

(جـ) $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٤$ (د) $(س + ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$

(١٩) فى الشكل المقابل :

ل
٥ سم
٤ سم

حجم الجسم الناتج من دوران

المنطقة المظللة دورة كاملة حول المستقيم ل

يساوى .... π وحدة مكعبة.

(أ) ١٦ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٢٠) المستقيمان المتخالفان يكونان ....

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان.

(جـ) منطبقان. (د) لا يجمعهم مستوى واحد.

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أثرت القوى المستوية ٥ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ نيوتن فى نقطة مادية وقياس الزاوية بين كل قوتين متتاليتين ٦٠° **أوجد مقدار كل من ق ، ك حتى تكون المجموعة متزنة.**

---

٢ خيمة من القماش على شكل مخروط دائرى قائم معادلة قاعدته $س^٢ + ص^٢ = ٩$ وارتفاعها $٢\sqrt{١٠}$ متر وكان سعر المتر المربع من القماش هو ٤٠ جنيه احسب سعر القماش المصنوع منه الخيمة علمًا بأن قاعدة الخيمة رملية (علمًا بأن $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

٥ إدارة بلبيس التعليمية — محافظة الشرقية



اختبار تفاعلى ⑤

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قوتان ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى نقطة و θ قياس الزاوية بينهما ، وكان : جا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، حيث θ ∈]٩٠° ، ١٨٠°[فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

② علق ثقل ٢٠٠ ث.جم من طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى سقف حجرة جذب الثقل بقوة أفقية ق حتى أصبح الخيط مائلاً على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° ، الشد فى الخيط ش فإن : $\frac{ق}{ش}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\sqrt{٣}$

③ حللت قوة مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين

فإن : ق١ = ... نيوتن.

(أ) ١٢ جتا ٧٥° (ب) ١٢ جتا ٤٥°

(جـ) ٦ قتا ٤٥° (د) ٦ قتا ٧٥°

④ إذا كانت : س٢ + ص٢ − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠ تمثل معادلة دائرة

فإن : نق = ...

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٢$\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٨

⑤ أ ب جـ د هـ شكل خماسى منتظم أثرت قوة ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{أجـ}$ حللت هذه القوة فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠$\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٠ (د) ١٢,٤

⑥ هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه = ٦ سم فإن حجمه = ... سم٣.

(أ) ٢٧$\sqrt{٣}$ (ب) ٣٦$\sqrt{٣}$ (جـ) ٥٤$\sqrt{٢}$ (د) ١٨$\sqrt{٢}$

(٧) قوتان متساويتان تؤثران فى نقطة وتحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° ومقدار محصلتهما $ح_١$ ، إذا تضاعفت القوتان وأصبح قياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومحصلتهما $ح_٢$

فإن : $\frac{ح_١}{ح_٢}$ = ...

(أ) ١ : ٢　　(ب) $\sqrt{٣}$: ٢　　(جـ) ١ : ١　　(د) ٢ : ١

(٨) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وطول راسمه ١٠ سم فإن حجمه = ... سم^٣.

(أ) ٣٢ π　　(ب) ٦٤ π　　(جـ) ٩٦ π　　(د) ٢٨٨ π

(٩) قوة مقدارها ٤٠ نيوتن حللت إلى قوتين متعامدتين مقداراهما ٢٤ ، ق نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١٢　　(ب) ٣٢　　(جـ) ٤٨　　(د) ٥٨

(١٠) هرم رباعى منتظم حجمه ٦٤ سم^٣ وارتفاعه = ٦ سم فإن محيط القاعدة = ... سم.

(أ) ٨　　(ب) ٨ $\sqrt{٢}$　　(جـ) ١٦　　(د) ١٦ $\sqrt{٢}$

(١١) قوتان مقداراهما ق ، $\frac{ق}{٣}$ ، ومحصلتهما ح ∈ [٨ ، ك]

فإن : قيمة ك = ... نيوتن.

(أ) ١٥　　(ب) ٢٤　　(جـ) ١٢　　(د) ١٦

(١٢) هرم سداسى منتظم حجمه ٨ $\sqrt{٣}$ سم^٣ وارتفاعه ٤ سم فإن محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ١٠　　(ب) ٨　　(جـ) ١٢　　(د) ١٨

(١٣) إذا كانت : $\overrightarrow{ق}$ = $\left(٦ ، \frac{٢\pi}{٣}\right)$　　فإن : $\|\overrightarrow{ق}\|$ = ...

(أ) ٣　　(ب) −٣　　(جـ) ٦　　(د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(١٤) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٦٠ ، ٨٨ ، ٦٠ ث.جم تؤثر فى نقطة ، الأولى نحو الشمال والثانية فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب والثالثة فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق. فإن مقدار محصلة هذه القوى = ... ث.جم.

(أ) ١٠　　(ب) ٦٠　　(جـ) ٢٨　　(د) ٨٨

(١٥) خيمة على شكل مخروط قاعدتها دائرة معادلتها : $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٦ ص - ٢٣ = ٠$ وارتفاعها ٨ متر فإن مساحة القماش اللازم لعمل الخيمة علمًا بأن القاعدة رملية هى .... متر.

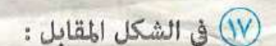
(أ) ١٣٢ π　　(ب) ١٥٠ π　　(جـ) ١٢٠ π　　(د) ٦٠ π

(١٦) فى الشكل المقابل :

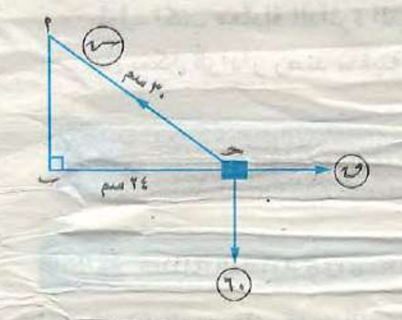
إذا كان ظا هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ، أب = ٢٦ سم ، فإن المساحة الجانبية للجسم الناشئ من دوران Δ أ ب و دورة كاملة حول محور السينات = ... سم^٢

(أ) ٣٦٠ (ب) ٢٦٠

(جـ) ٣٦٠ π (د) ٢٦٠ π



(١٧) فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ٦٠ ث.جم معلق بخيط خفيف طوله ٣٠ سم جذب بقوة أفقية حتى اتزن على بعد ٢٤ سم من الحائط فإن : ق = ... ث.جم.

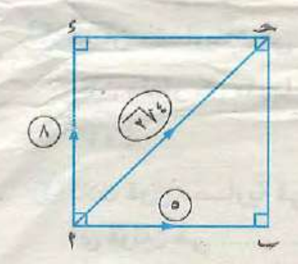
(أ) ٢٠ (ب) ٨٠

(جـ) ١٠٠ (د) ١٨٠

(١٨) قوتان ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران فى نقطة والمحصلة عمودية على إحداهما فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

(١٩) فى الشكل المقابل :

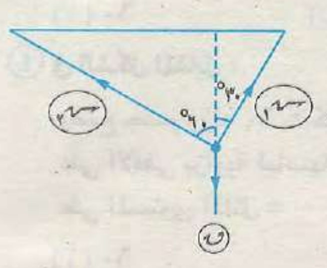


أ ب حـ ء مربع ، محصلة القوى ٥ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٨ نيوتن فى الصورة القطبية ....

(أ) (٥ ، ٥٤°) (ب) (١٥ ، ٦٠°)

(جـ) (١٣ ، ٩٠°) (د) (١٥ ، ٥٣ َ ٨°)

(٢٠) فى الشكل المقابل :



فانوس وزنه ٣٦ ث.كجم معلق بحبلين فى أحد الشوارع بحيث كان الحبلان يميلان على الرأسى بزاويتين ٣٠° ، ٦٠°



فإن : ش$_١$ + ش$_٢$ = ...

(أ) ٩ + ١٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٦ + ١٨ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٤٥ (د) ١٨ $(١ + \sqrt{٣})$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث.جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث حا هـ = ٠,٦ إذا اتزن الجسم بواسطة قوة أفقية. أوجد هذه القوة ورد فعل المستوى.

(٢) رادار عند الموقع أ (٧ ، -٩) ويغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها يساوى ٣٠ وحدة طول. اكتب معادلة الدائرة التى تحدد مجال عمل الرادار فى المستوى الإحداثى.
هل يمكن للرادار رصد سفينة فى الموقع ب (٢٥ ، -٣٠) ؟ فسر إجابتك.

٦ إدارة منوف التعليمية — محافظة المنوفية

اختبار تفاعلى (٦)

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان تؤثران فى نقطة مادية ومتعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٧

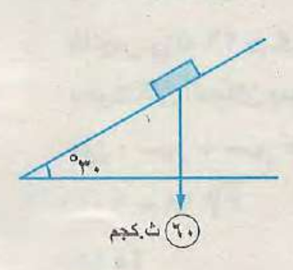
(٢) قوتان متساويتان فى المقدار وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن. فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤ $\sqrt{٢}$

(٣) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين هى ....°

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

(٤) فى الشكل المقابل :

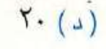


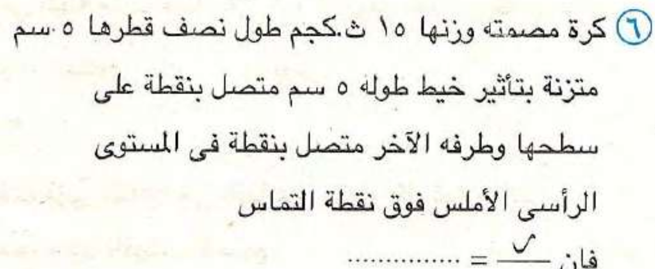
وضع جسم وزنه ٦٠ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار المركبة العمودية على المستوى المائل = ... ث.كجم.

(أ) ٦٠ (ب) ٣٠ $\sqrt{٣}$
(جـ) ٣٠ $\sqrt{٢}$ (د) ٣٠

(٥) في الشكل المقابل :

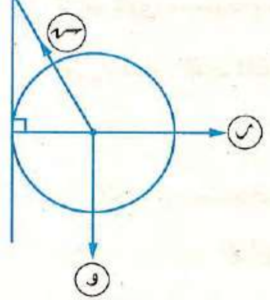
علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقي واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. فإن : $ش_١ - ش_٢$ = ... ث.جم.

(أ) ٤٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٣٠ (د) ٢٠ 



(٦) كرة مصمتة وزنها ١٥ ث.كجم طول نصف قطرها ٥ سم متزنة بتأثير خيط طوله ٥ سم متصل بنقطة على سطحها وطرفه الآخر متصل بنقطة في المستوى الرأسي الأملس فوق نقطة التماس

فإن $\frac{ر}{ش}$ = ...



(أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ١ (جـ) ١ : ٢ (د) ١ : ٣

(٧) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = $\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ - ٣ $\overleftarrow{ص}$

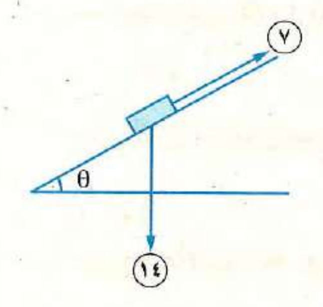
فإن مقدار محصلتهما = ...

(أ) ١٢ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ٤

(٨) في الشكل المقابل :

الجسم متزن على مستوى أملس

فإن : θ = ... °



(أ) ٣٠ (ب) ٤٥

(جـ) ٦٠ (د) ٧٥

(٩) قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن

فإن مقدار محصلتهما مقاسة بالنيوتن ∋ ....

(أ) [٢ ، ٨] (ب)]٢ ، ٨[(جـ) [٢ ، ٨] (د)]٢ ، ٨]

(١٠) فى الشكل المقابل :

إذا كان مقدار المحصلة ح = ١٢ نيوتن

فإن : $ق_١$ = ... نيوتن. حيث القوى مقدرة بالنيوتن.

(أ) ١٢ جا ٧٥ (ب) ١٢ جا ٤٥

(جـ) ٦ قا ٤٥ (د) ٦ قا ٧٥

(١١) ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة متزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقدارى قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ١١

(١٢) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب (ب) جيب تمام (جـ) ظل (د) ظل تمام

(١٣) القوتان : ٣ ق − ١ ، ق + ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية والمحصلة تنصف الزاوية بينهما فإن : مقدار ق = ... داين.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٤) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٨ سم ، وطول راسمه ١٠ سم يكون حجمه .... $سم^٣$.

(أ) ٣٠ π (ب) ٤٠ π (جـ) ٨٠ π (د) ٩٦ π

(١٥) هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ١٢ سم فتكون مساحته الكلية = ... $سم^٢$.

(أ) ١٤٤ (ب) ١٤٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٤٤ $\sqrt{٣}$ (د) ١٤٤ $\sqrt{٦}$

(١٦) جميع الحالات الأتية تعيين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيم ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين وغير متطابقين. (د) مستقيمين متخالفين.

(١٧) النقطة التى تقع على الدائرة : $(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٢٥$ هى ....

(أ) (٣ ، ٤) (ب) (٣ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٤) (د) (٠ ، ٠)

(١٨) هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٤٠ سم ، وارتفاعه ١٢ سم
فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٢٠٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٢٦٠ (د) ٣٢٠

(١٩) الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دوره كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور يسمى ....

(أ) مكعب. (ب) هرم.
(جـ) مخروط. (د) متوازى مستطيلات.

(٢٠) محيط الدائرة التى معادلتها : $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٥ π (ب) ١٠ π (جـ) ١٥ π (د) ٢٥ π

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ل سم أثرت القوى التى مقاديرها ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب.
أوجد : مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

---

٢ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (١ ، ١) ويمسها المستقيم الذى معادلته :
٣ س + ٤ ص + ٢٣ = ٠



٧ إدارة قطور التعليمية — محافظة الغربية



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القوة $\overleftarrow{ح}$ يمكن تحليلها إلى قوتين $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ وتصنعان مع $\overleftarrow{ح}$ زاويتين قياسهما $هـ_{١}$ ، $هـ_{٢}$ من جهتيها على الترتيب. فإن : $ق_{١}$ = ...

(أ) $\frac{ح \text{ حا } هـ_{١}}{\text{حا }(هـ_{١} - هـ_{٢})}$ (ب) $\frac{ح \text{ حا } هـ_{١}}{\text{حا }(هـ_{١} + هـ_{٢})}$ (جـ) $\frac{ح \text{ حا } هـ_{٢}}{\text{حا }(هـ_{١} + هـ_{٢})}$ (د) $\frac{\text{حا }(هـ_{١} - هـ_{٢})}{ح \text{ حا } هـ_{٢}}$

(٢) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٧ $\overleftarrow{س}$ − ٥ $\overleftarrow{ص}$ فإن : ‖$\overleftarrow{ح}$‖ = ... وحدة قوة.

(أ) $\sqrt{٥} - \sqrt{٧٤}$ (ب) ٤٩ (جـ) ١٣ (د) $\sqrt{١٢} - \sqrt{٥}$

(٣) قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتيهما يساوى ٨ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ فإن مقدار كل منهما = ... نيوتن.

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

(٤) قوتان مقداراهما ٣ ، ٤ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ فإن مقدار محصلتيهما = ... نيوتن.

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٣

(٥) قوتان مقداراهما ٨ ، ١٣ نيوتن ، القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلتيهما على الترتيب هما .... ، .... نيوتن.

(أ) ١٣ ، ٨ (ب) ١٣ ، ٥ (جـ) ٢١ ، ٨ (د) ٢١ ، ٥

(٦) مقدار محصلة قوتان مقداراهما ٤ ، ٤ نيوتن ويحصران بينهما زاوية قياسها °١٢٠ يساوى .... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٧) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى مستوية ومتزنة فإن مقدار $\overleftarrow{ق_٣}$ = ...

(أ) $\sqrt{١٣}$ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٥ (د) ٧

(٨) قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق ، ثم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٩) قوتان مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ ث.جم فإن المحصلة قيمة عظمى عندما يكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر° (ب) °٦٠ (جـ) °١٢٠ (د) °١٨٠

(١٠) قوتان مقداراهما ٣ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كانت محصلتيهما عمودية على القوة الأولى فإن قيمة ق بالنيوتن تساوى ....

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) ٣ $\sqrt{٢}$ (د) ٦

(١١) قوتان متساويتان مقدار كل منهما ٦ نيوتن ، ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن. فإن قياس الزاوية بينهما تساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(١٢) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = −٥ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = أ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ متزنة فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (−٣ ، −٥) (ب) (٣ ، −٥) (جـ) (−٣ ، ٥) (د) (٣ ، ٥)

(١٣) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ متوازى مستطيلات

فإن : $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ء ءَ}$ ....

(أ) متقاطعان. (ب) متوازيان. (جـ) متخالفان. (د) منطبقان.

(١٤) طول قطر الدائرة $س^٢ + ص^٢$ − ٢ س − ٦ ص + ١ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(١٥) محيط الدائرة التى معادلتها : $(س − ٣)^٢ + (ص − ٢)^٢$ = ٢٥ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

(١٦) النقطة التى تقع على الدائرة : $(س − ٢)^٢ + ص^٢$ = ١٣ يمكن أن تكون ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

(١٧) فى الشكل المقابل :

المساحة الجانبية لهرم رباعى منتظم ارتفاعه ١٦ سم

وطول ضلع قاعدته ٢٤ سم تساوى ....

(أ) ٤٠ $سم^٢$ (ب) ٨٠ $سم^٢$

(جـ) ٩٦٠ $سم^٢$ (د) ١٥٣٦ $سم^٢$

(١٨) حجم مخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... $سم^٣$

(أ) ١٢٠ π (ب) ٤٠ π (جـ) ٢٢ π (د) ٢٠ π

(١٩) هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ٨ سم ، فإن ارتفاعه الجانبى يساوى .... سم.

(أ) ٣ (ب) ٣ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

(٢٠) وضع جسم وزنه ١٠ ث.جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بواسطة قوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى ن فإن مقدار القوة = ... ث.جم.

(أ) ٥ (ب) ٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ علق ثقل مقداره ٧٥ ث.جم فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى. أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط حتى أصبح مائلًا على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

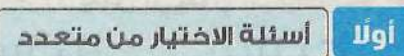
أوجد فى وضع الاتزان مقدار القوة وكذلك الشد فى الخيط.

---

٢ اثبت أن : المستقيم ٥ س + ١٢ ص - ٧ = ٠ يقطع الدائرة $س^٢ + ص^٢$ + ٦ س - ٨ ص - ١١ = ٠ فى نقطتين مختلفتين.



٨ إدارة نبروه التعليمية — محافظة الدقهلية



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ٨

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان مقداراهما ٦ ، ٢,٥ نيوتن ومحصلتهما تساوى ٦,٥ نيوتن.
فإن الزاوية بين القوتين تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) منعكسة.

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = (٣ ، -٥)
فإن : $\overrightarrow{ق_٣}$ التى تجعل المجموعة متزنة هى ....

(أ) (-٥ ، -٢) (ب) (-٥ ، ٢) (جـ) (٥ ، ٢) (د) (٥ ، -٢)

③ إذا اتزنت القوة $\overrightarrow{ق}$ مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٦ ، ٨ ث.كجم

فإن : $\|\overrightarrow{ق}\|$ = ... ث.جم.

(أ) ١٠٠ (ب) ٦٤ (جـ) ١٠ (د) ٢

④ أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ١٠ ، ٦ نيوتن فى الاتجاهات $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{أ حـ}$ ، $\overrightarrow{أ ء}$ على الترتيب فإن المحصلة تصنع زاوية قياسها .... مع $\overrightarrow{أ ب}$

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) ٩٠°

⑤ كرة وزنها ١٢ ث.كجم تستند على حائط رأسى أملس من نقطة على سطحها ربطت بخيط خفيف ثبت طرفه الآخر فى نقطة أعلى نقطة التماس.

فإن : ش − ر = ... ث.كجم.

(أ) $٨\sqrt{٣}$ (ب) $٤\sqrt{٣}$

(جـ) ٤ (د) ٨

⑥ قوتان متعامدتان مقداراهما ٦ ، ٨ نيوتن فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى هو ....

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

⑦ قوتان متساويتان مقدار محصلتهما ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$ فإن مقدار كل منهما = ... نيوتن.

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) ٨

⑧ وضع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ٣٠° وكانت $ق_١$ ، $ق_٢$ هما مركبتى الوزن فى اتجاه المستوى والعمودى عليه

فإن : $ق_٢ : ق_١$ = ...

(أ) $٤٠\sqrt{٣}$ (ب) $٢٠\sqrt{٣}$ (جـ) ٢ (د) $\sqrt{٣}$

(٩) فى الشكل المقابل :

تتزن مجموعة القوى عندما ....

(أ) ق = ١٠ نيوتن. (ب) ق = ١٠ $\sqrt{٢}$

(جـ) ق = ٥ $\sqrt{٢}$

(د) لا يمكن لهذه المجموعة أن تتزن.

(١٠) جسم وزنه ١٨ ث.كجم وضع على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° أثرت على الجسم قوة أفقية ق فاتزن الجسم على المستوى

فإن : ق + ر = ... ث.كجم.

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٢ $\sqrt{٣}$

(جـ) ١٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٤ $\sqrt{٣}$

(١١) علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بخيطين طوليهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم وثبتا طرفاهما الآخرين فى نقطتين على خط أفقى البعد بينهما ١٠٠ سم.

فإن مجموع مقدار الشد فى كل من الخيطين = ... ث.جم.

(أ) ٢٨٠ (ب) ٣٠٠ (جـ) ٣١٠ (د) ٢٣٠

(١٢) إذا كانت : $\overline{ح}$ محصلة القوتين $\overline{ق}$ ، $\overline{ك}$ ، وكان : $ق^{٢} = ك^{٢} - ح^{٢}$ فإن : ....

(أ) $\overline{ق} \perp \overline{ك}$ (ب) $\overline{ح} \perp \overline{ك}$ (جـ) $\overline{ح} \perp \overline{ق}$ (د) $\overline{ح} \parallel \overline{ك}$

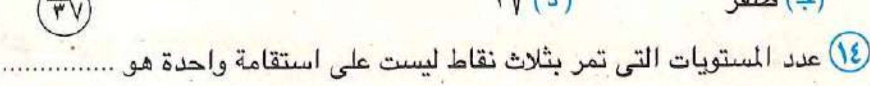
(١٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان مقدار محصلة القوى = ٣ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

فإن : ق = ...

(أ) ٣ (ب) $\sqrt{٣}$

(جـ) صفر (د) $\sqrt{٢}$



(١٤) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(١٥) حجم الهرم الذى قاعدته مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٦ سم وارتفاعه ٩ $\sqrt{3}$ سم = ... سم^3

(أ) ٧٢٩ (ب) ٢٤٣ (جـ) ٨١ (د) ٩

(١٦) مخروط دائرى قائم طول نصف قاعدته ٦ سم ، وطول راسمه ١٠ سم فإن حجمه = ... سم^3

(أ) ٣٢ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٩٦ π (د) ٢٨٨ π

(١٧) دائرة تمس محور السينات وتقطع محور الصادات فى النقطتين (٠ ، ٢) ، (٠ ، ٨) طول نصف قطرها = ... وحدة.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

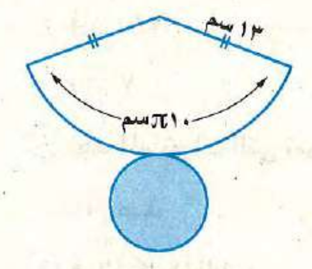
(١٨) إذا كانت الدائرة تمس محورى الاحداثيات وتقع فى الربع الأول فإن مركزها يمكن أن يكون ....

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (٢ ، ١) (د) (٢ ، ٤)

(١٩) طول القطعة المماسة للدائرة : س^2 + ص^2 = نق^2 من النقطة (٠ ، ٢ نق) = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\sqrt{3}$ نق (د) ٣ نق

(٢٠) الشبكة أمامك تصف مجسم حجمه = ... سم^3



(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π

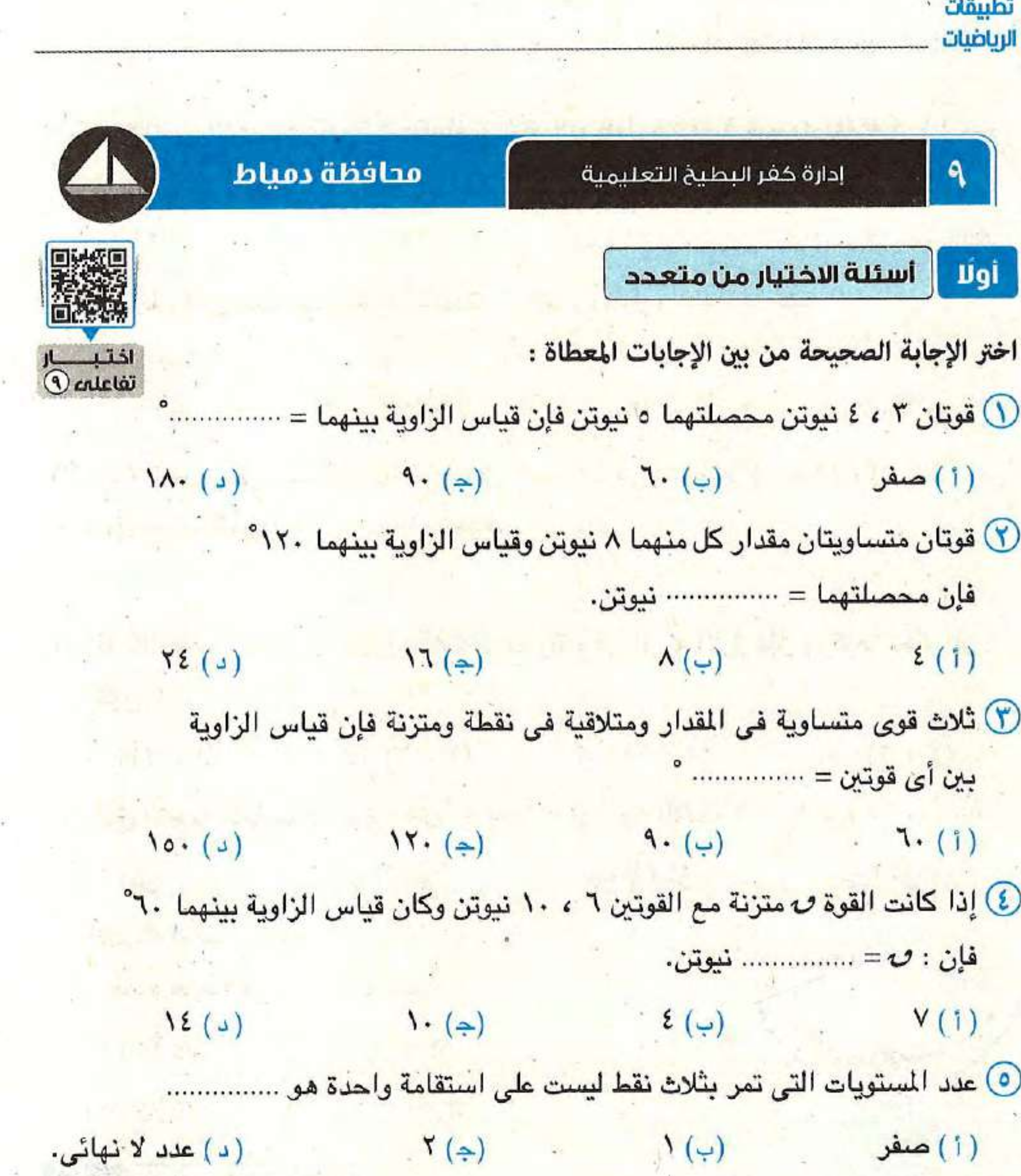
(جـ) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ $\overline{أب}$ قضيب منتظم يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى شد الطرف ب بقوة أفقية وتساوى نصف وزن القضيب أوجد فى وضع الاتزان زاوية ميل القضيب على الرأسى.

٢ هرم رباعى قائم مساحته الجانبية ٢٦٠ سم^2 وارتفاعه الجانبى ١٣ سم أوجد ارتفاع الهرم وحجمه.



٩ | إدارة كفر البطيخ التعليمية | محافظة دمياط

اختبـــار تفاعلى ⑨

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قوتان ٣ ، ٤ نيوتن محصلتهما ٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...°

(أ) صفر (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٨٠

② قوتان متساويتان مقدار كل منهما ٨ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°
فإن محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

③ ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

④ إذا كانت القوة ق متزنة مع القوتين ٦ ، ١٠ نيوتن وكان قياس الزاوية بينهما ٦٠°
فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ١٤

⑤ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

⑥ فى الشكل المقابل :

إذا كانت القوى متزنة
فإن : س – ق = ... نيوتن.

(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠
(جـ) ٥٠ (د) ٣٠

⑦ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها الصغرى فإن قياس الزاوية بينهما = ... °

(أ) ١٨٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٦٠ (د) صفر

⑧ القيمة العظمى لمحصلة قوتين ٥ ، ٨ نيوتن تساوى .... نيوتن.

(أ) ١٣ (ب) ٨ (جـ) ٥ (د) ٣

⑨ إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = أ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ − ب $\overleftarrow{ص}$

، محصلتهم $\overleftarrow{ح}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، −١) (ب) (−١ ، ١) (جـ) (−١ ، −١) (د) (١ ، ١)

⑩ قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال الشرقى تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

⑪ فى الشكل المقابل :

مقدار القوة $\overleftarrow{ق}$ فى وضع الاتزان = ... نيوتن.

(أ) ٢٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٥

(جـ) ٥٠ (د) ٢٥ $\sqrt{٢}$

⑫ قوتان مقداراهما ٦ ، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥°

وإذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية ٤٥° على خط عمل القوة ق

فإن : ق = ... ث.كجم.

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٢}$ (د) ١٠

⑬ إذا وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الرأسى بزاوية (هـ) فإن مركبة وزن الجسم فى اتجاه المستوى لأسفل هى ....

(أ) و ظا هـ (ب) و جا هـ (جـ) و (د) و جتا هـ

(١٤) فى الشكل المقابل :

محصلة القوى تؤثر فى محور الصادات

فإن : ق = ... وحدة قوة.

(أ) ٢ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٤

ص
ق
٦
٣٠°
٣٠°
س
س
و
٨
ص

(١٥) مركز الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (−٤ ، ٣) (ب) (−٣ ، −٤) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (٣ ، −٤)

(١٦) النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى منتظم الوجوه وارتفاعه = ...

(أ) $\sqrt{٢} : \sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٦} : ٢$ (جـ) $\sqrt{٣} : ٢$ (د) $\sqrt{٣} : ٣$

(١٧) إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٨

(جـ) ٥ (د) ٢,٥

٢٠ سم
م

(١٨) محيط الدائرة التى معادلتها : $(س + ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢,٥ π (ب) ٥ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

(١٩) طول القطعة المماسة للدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ٩$ المرسومة من النقطة (٥ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٤

(٢٠) مخروط دائرى قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم

فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ٩ (ب) ٥ (جـ) ٤,٥ (د) ١٨

ثانيا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠ سم^٣ وارتفاعه ١٢ سم **أوجد مساحته الجانبية ؟**

(٢) علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم **أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى وضع الأتزان ؟**



١٠ إدارة بيلا التعليمية — محافظة كفر الشيخ

اختبار تفاعلى (١٠)

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، فإن مركبة الوزن فى اتجاه عمودى على المستوى = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٢}$ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

(٢) مركز الدائرة التى معادلتها : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو ....

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (٤ ، -٣) (جـ) (٣ ، -٤) (د) (-٣ ، -٤)

(٣) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٤ ق ، ٥ ق ومقدار محصلتهما ٩ ق ، فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

(٤) هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه = ... سم^٣

(أ) ٨١٠ (ب) ٢٧٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ١٨٠

(٥) من الشكل المقابل :

ق$_١$ = ...

(أ) ١٢ جا ٧٥° (ب) ١٢ جا ٤٥°

(جـ) ٦ قا ٧٥° (د) ٦ قا ٤٥°

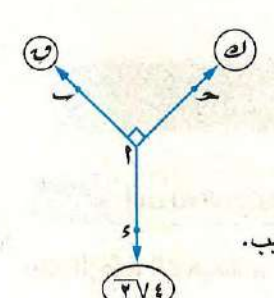
ق$_٢$ — ح = ١٢ — ٣٠° — ٤٥° — ق$_١$

(٦) علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم فإن مقدار الشد فى الخيطين = ... ث.جم.

(أ) ١٠٠ ، ١٣٠ (ب) ١٦٠ ، ١٢٠ (جـ) ١٢٠ ، ١٨٠ (د) ١٥٠ ، ١٦٠

(٧) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ سم وطول راسمه ٥ سم يكون حجمه = ... سم^٣

(أ) ٣٦ π (ب) ١٥ π (جـ) ٢٤ π (د) ١٢ π



(٨) فى الشكل المقابل :

ثلاث قوى متزنة مقاديرها ق ، ك ، ٤ √٢ نيوتن

، ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° ، ق(∠ب أ ء) = ١٣٥°

فإن : ق ، ك تساوى .... ، .... نيوتن على الترتيب.

(أ) ٤ ، ٤ (ب) ٤ ، √٢

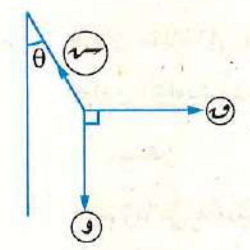
(جـ) ٢ ، ٢ (د) √٢ ، ٤

(٩) إذا كانت ى الزاوية بين قوتين مقداراهما ٣ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ى ∈]٠ ، π[

فإن مقدار محصلة القوتين مقاسة بالنيوتن ∈ ....

(أ)]٤ ، ١٠[(ب) [٤ ، ١٠[(جـ)]٤ ، ١٠] (د) [٤ ، ١٠]

(١٠) فى الشكل المقابل :



علق ثقل مقداره (و) نيوتن فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر

فى حائط رأسى وشد الثقل بقوة أفقية مقدارها ق نيوتن

حتى أصبح الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها θ فأى

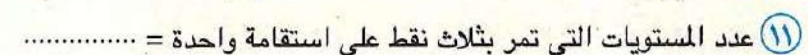
الجمل الآتية غير صحيحة فى وضع الاتزان ....



(أ) ق = و ظا θ (ب) ش = ق + و

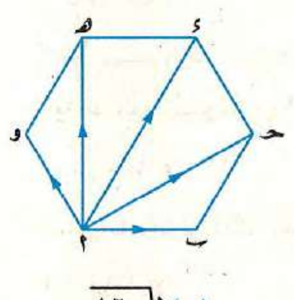
(جـ) $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ش} = \overleftarrow{٠}$ (د) ش^2 = ق^2 + و^2

(١١) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة = ...



(أ) ١ (ب) ٦ (جـ) عدد لا نهائى. (د) ٣

(١٢) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء هـ و سداسى منتظم ، القوى التى مقاديرها

٨ ، ٦√٣ ، ٥ ، ٤√٣ نيوتن

أثرت فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ بالترتيب

فإن مقدار محصلتهم = ... نيوتن.

(أ) √٥٦١ (ب) √٦٥١ (جـ) √١٥٦ (د) √١٦٥

(١٣) النقطة التى تقع على الدائرة : $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

(١٤) قوتان مقداراهما $٨\sqrt{٣}$ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠° فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٦٤ (ب) ٣٢ (جـ) ١٦ (د) ٨

(١٥) إذا كان : $\overleftrightarrow{أب} \subset$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // المستوى س فإن : $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ....

(أ) متوازيان فقط. (ب) متخالفان فقط.

(جـ) متوازيان أو متخالفان. (د) متقاطعان.

(١٦) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٨ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ى° ، فإذا كانت المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين فإن قيمة ق بالنيوتن = ...

(أ) ١٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٤

(١٧) طول القطعة المماسة للدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ٩$ من النقطة (٥ ، ٠) = ... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ١٤

(١٨) فى الشكل المقابل :

إذا كان الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى و فى ترتيب دورى واحد

، أب = ٤ سم ، أجـ = ٣ سم

فإن : $ق_١ : ق_٢ : ق_٣$ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٣ (ب) ٣ : ٥ : ٤ (جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

(١٩) إذا كانت القوى $\overline{ق_١} = ٥ \overline{س} + ٣ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = أ \overline{س} + ٦ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣} = -١٤ \overline{س} + ب \overline{ص}$ متزنة فإن : أ + ب = ...

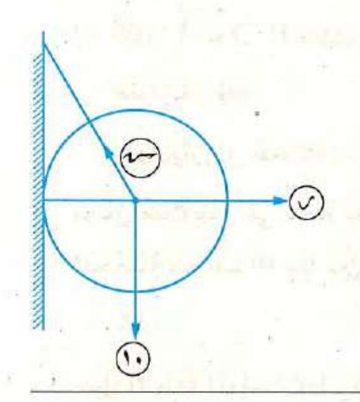
(أ) صفر (ب) ١٨ (جـ) −١٨ (د) ٢٧

(٢٠) أثرت القوى ٨ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة فى اتجاه دورى واحد فإن مقدار محصلة القوى = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٧

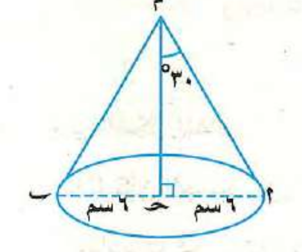
ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :



(١) فى الشكل المقابل :

كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ ث.جم وطول نصف قطرها ٣٠ سم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٣٠ سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس. أوجد فى وضع الاتزان مقدار الشد فى الخيط ورد فعل الحائط على الكرة.



(٢) فى الشكل المقابل :

مخروط دائرى قائم فيه : ق (∠ أ م حـ) = ٣٠°

، طول نصف قطر القاعدة = ٦ سم

أوجد : (١) المساحة الجانبية للمخروط (بدلالة π) ؟

(٢) ارتفاع المخروط ؟



١١ توجيه الرياضيات **محافظة الفيوم**

أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد**

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن متلاقيتان فى نقطة ، وقياس الزاوية بينهما $\frac{٢\pi}{٣}$ ومقدار محصلتهما ق نيوتن ، فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٢ $\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) ٤

(٢) قوة مقدارها ٥٠ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق ، فإن مركبتها فى اتجاه الشمال تساوى .... نيوتن.

(أ) ٢٥ $\sqrt{3}$ (ب) ٥٠ $\sqrt{3}$ (جـ) ٥٠ (د) ٢٥

(٣) المعادلة $\begin{vmatrix} س & ص - ٦ \\ - ص & س - ٤ \end{vmatrix}$ - ١٢ = صفر تمثل دائرة طول نصف قطرها يساوى.............. وحدة طول.

(أ) ١٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

(٤) ربط جسم وزنه ٢٠ نيوتن بأحد طرفى خيط خفيف والطرف الآخر للخيط مثبت فى نقطة فى حائط رأسى ، شد الجسم بقوة ق عمودية على الخيط فاتزن الجسم عندما كان الخيط يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥° ، فإن : ق + ش = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ٢٠ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٠ $\sqrt{2}$ (د) ٤٠

(٥) خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ٩ ، ٦ ، ٤ $\sqrt{2}$ ، ٥ $\sqrt{2}$ ، ٥ نيوتن ، وتعمل فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب ، فإن محصلة هذه القوى = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{3}$ (جـ) ٦ $\sqrt{2}$ (د) صفر

(٦) أقل عدد من المستويات تكون مجسمًا هو ....

(أ) مستويان. (ب) ثلاثة مستويات.

(جـ) أربعة مستويات. (د) خمسة مستويات.

(٧) قوتان متساويتان فى المقدار ومتلاقيتان فى نقطة ومحصلتهما تساوى كل من القوتين ، فإن قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين يساوى ....°

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٥٠ (د) ١٢٠

(٨) إذا كانت : $\overline{ق_1}$ = ٧ $\overline{س}$ + ٤ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2}$ = أ $\overline{س}$ + ٢ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_3}$ = -١٠ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$ وكانت هذه القوى متزنة فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ١ (د) -١

(٩) مخروط دائرى قائم حجمه ٢٧ π سم^{٣} ، ومحيط قاعدته ٦ π سم

، فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٨ (جـ) ٩ (د) ١٢

(١٠) قوتان متلاقيتان فى نقطة ، محصلتهما ح $\in$ [٢ ، ١٠] نيوتن

، فإن مقدار كل من القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٣ ، ٧ (ب) ٦ ، ٤ (جـ) ٤ ، ٧ (د) ٢ ، ١٠

(١١) فى الشكل المقابل :

المستوى أملس ، والمجموعة متزنة

فإن : ر + ق = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٥ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٤٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٤٥ $\sqrt{٣}$

ر
ق
٣٠°
(٣٠) نيوتن

(١٢) إذا كانت معادلة دائرة تمر بنقطة الأصل هى :

أ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٤ س − ٨ ص + (أ + ب) س ص + جـ − ٢ = صفر ، فإن طول نصف قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ٢ $\sqrt{٥}$ (جـ) ١٠ (د) $\sqrt{٥}$

(١٣) فى الشكل المقابل :

كرة ملساء وزنها ١٠٠ نيوتن طول نصف قطرها ٣٠ سم ، تستند على حائط رأسى أملس ومعلقة بخيط $\overline{أب}$ طوله ٢٠ سم ، فإنه فى وضع التوازن

يكون : ش − ر = ... نيوتن.

أ
ش
ب
جـ
م
ر
و = ١٠٠ نيوتن

(أ) ٥٠ (ب) ٧٥ (جـ) ٢٥ (د) ٢٠

(١٤) قوتان متعامدتان متلاقيتان فى نقطة ومتساويتان فى المقدار ، مقدار محصلتهما ١٢ ث.كجم

، فإن مقدار كل من القوتين = ... ث.كجم.

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٢

(١٥) فى الشكل المقابل :

مخروط دائرى قائم

، فإن مساحته الجانبية = ... سم².

(أ) ١٠٠ π (ب) ٧٥ π

(جـ) ٥٠ π (د) ٢٥ π

(١٦) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ١٢ ، ٦ نيوتن وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠°

، فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ١٢ $\sqrt{٧}$ (ب) ١٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٧}$ (د) ٦ $\sqrt{٣}$

(١٧) جسم فى حالة توازن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ تحت تأثير قوة مقدارها نصف وزن الجسم وتعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى

، فإن : θ = ...°

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

(١٨) كل الحالات الآتية تعين مستويًا ماعدا ....

(أ) مستقيمان متقاطعان. (ب) مستقيم ونقطة لا تنتمى له.

(جـ) مستقيمان متخالفان. (د) مستقيمان متوازيان وغير منطبقين.

(١٩) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ − ٣ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_٣}$ = −٣ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ ، وكانت محصلتهم $\overrightarrow{ح}$ = (١٠ ، $\frac{٢\pi}{٣}$)

، فإن : أ + $\sqrt{٣}$ ب = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) −٥ (د) ٥

(٢٠) هرم ثلاثى منتظم الوجوه ، طول أى حرف فيه ٨ $\sqrt{٣}$ سم ، فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ١٢ (ب) ٨ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ١٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) ساق منتظمة وزنها ٥٠ نيوتن يتصل أحد طرفيها بمفصل فى حائط رأسى ، شد الطرف الآخر بقوة أفقية تعادل نصف وزن الساق فاتزنت ، أوجد فى وضع التوازن رد فعل المفصل وقياس زاوية ميل الساق على الرأسى.

٢ هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٤٨ سم وارتفاعه الجانبى ١٠ سم أوجد مساحته الكلية وحجمه.

١٢ إدارة ببا التعليمية **محافظة بنى سويف**

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان متساويتان مقدار كل منهما (ق) ومتلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما = ق
فإن قياس الزاوية بينهما = ... °

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(٢) ازيحت كرة بندول وزنها ٨٠٠ داين حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها °٣٠ مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط
فإن : (ق) = ... داين.

(أ) ٢٠٠ (ب) ٣٠٠ (جـ) ٤٠٠ (د) ٥٠٠

(٣) النقطة التى تقع على الدائرة : $(س - ٤)^٢ + ص^٢ = ٣٤$ هى ....

(أ) (-٤ ، ٣) (ب) (١ ، -٢) (جـ) (-١ ، -٣) (د) (٢ ، -٣)

(٤) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية قياسها (ى)
فإن مركبة الوزن فى اتجاه المستوى = ...

(أ) و جا ى (ب) و جتا ى (جـ) و ظا ى (د) صفر

(٥) أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا هو ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية = ...

(أ) ٣ π نق^٢ (ب) ٢ π نق^٢ (جـ) ٣ π نق^٣ (د) ٤ π نق^٣

(٧) أى مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنه ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٨ نيوتن ، ٥ نيوتن ، ١٤ نيوتن.
(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٥ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن.

(٨) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين هى ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٥٠°

(٩) قوتان مقداراهما ٩ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° تكون مقدار المحصلة ≃ .... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ١٤ (جـ) ٦,٥ (د) ١٧

(١٠) إذا كان : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_3}$ = -١٤ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتزنة فإن : أ + ب = ...

(أ) ١٨ (ب) -٩ (جـ) ٩ (د) صفر

(١١) قوتان مقداراهما ٤ نيوتن ، ٨ نيوتن فإن محصلتهما ∋ ....

(أ) [٤ ، ١٢] (ب) [٨ ، ٣٢] (جـ) [٥ ، ٢٤] (د) [١٣ ، ٤٠]

(١٢) معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها = ٥ سم هى ....

(أ) $س^2 + ص^2 = ٥$ (ب) $س^2 + ص^2 = ١٠$

(جـ) $س^2 + ص^2 = ٢٥$ (د) $(س - ٥)^2 + (ص - ٥)^2 = ٥$

(١٣) فى الشكل المقابل :

إذا كانت القوى متزنة

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٦

(جـ) ٤ (د) ٢

(١٤) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ١٠ سم وارتفاعه ١٨ سم يكون حجمه = ... $سم^3$.

(أ) ١٨٠٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٦٠٠

(١٥) هرم ثلاثى منتظم الوجوه محيط قاعدته = ٣٦ سم تكون مساحته الكلية = ... $سم^2$.

(أ) $٣٦\sqrt{٣}$ (ب) $١٢٠\sqrt{٣}$ (جـ) $١٤٤\sqrt{٣}$ (د) $٥٥\sqrt{٣}$

(١٦) وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها ٠,٧٥
فإن مركبة الوزن فى الاتجاه العمودى على المستوى = ...

(أ) ٤٠ نيوتن. (ب) ٣٦ نيوتن. (جـ) ٣٠ نيوتن. (د) ٢٥ نيوتن.

(١٧) مخروط دائرى قائم ارتفاعه = ٨ سم وطول قطر قاعدته = ١٢ سم
يكون حجمه = ... سم^3.

(أ) ٩٦ π (ب) ٥٧ π (جـ) ٢٠ π (د) ١٢ π

(١٨) وضع جسم وزنه ٣٠ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°
وحفظ اتزانه بواسطة قوة أفقية فإن قيمة هذه القوة ≃ .... نيوتن.

(أ) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ١٧,٣ (د) ٥٠

(١٩) حللت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن إلى مركبتين فى اتجاهين مختلفين منها وكان قياس الزاوية
بينها وبين القوة الأولى = ٣٠° وبينها وبين الثانية = ١٥°
فإن المركبة الثانية ≃ .... نيوتن.

(أ) ١٥ (ب) ١٤,١٤ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

(٢٠) إذا كان القوتان ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة
الأولى = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

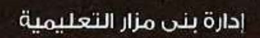
ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ مخروط دائرى قائم حجمه ٢٧ π سم^3 ، ومحيط قاعدته ٦ π سم **أوجد ارتفاعه.**

---

٢ علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين خفيفين يميلان على الرأسى بزاويتين قياسهما
هـ° ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان مقدار الشد فى الخيط الأول ١٢ نيوتن والخيط
الثانى ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن. **أوجد : هـ°**

١٣  إدارة بنى مزار التعليمية — محافظة المنيا



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) محيط الدائرة التى معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ١٦$ هو .... سم.

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π (جـ) ٨ π (د) ٦٤ π

(٢) هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ٦ سم يكون حجمه .... سم^٣.

(أ) ٢٧ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٥٤ $\sqrt{٢}$ (د) ١٨ $\sqrt{٢}$

(٣) عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

(٤) قوتان متساويتان مقدار محصلتهما تساوى ٤ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°
فإن مقدار كل منها = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(٥) قوتان مقداراهما ق ، ك نيوتن حيث ق > ك وكانت اصغر واكبر قيمة لمحصلتهما ٧ ، ١١ نيوتن على الترتيب فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١١ (جـ) ٩ (د) ٤

(٦) الجسم متزن على مستوى مائل

فإن : θ = ... °

(أ) ٦٠ (ب) ٤٥

(جـ) ٣٠ (د) ٧٥

(٧) قوة مقدارها ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثر فى اتجاه ٦٠ شرق الشمال حللت إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) ٩ (ب) ٩ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٨ (د) ٦

(٨) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_٣}$ = −١٤ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ وكانت $\overleftarrow{ح}$ = −١٠ $\overleftarrow{س}$ + ١٠ $\overleftarrow{ص}$

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (−١ ، ١)　　(ب) (١ ، ١)　　(جـ) (١ ، −١)　　(د) (−١ ، −١)

(٩) المستقيمات الرأسية المختلفة فى الفراغ ....

(أ) متوازية.　　(ب) متخالفة.

(جـ) يجمعهما مستوى واحد.　　(د) متقاطعة.

(١٠) مركز الدائرة التى معادلتها : $(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١٣$ هو ....

(أ) (−١ ، ٢)　　(ب) (−٢ ، ١)　　(جـ) (١ ، −٢)　　(د) (٢ ، −١)

(١١) مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ٢٧　　(ب) ٣　　(جـ) $٣\sqrt{٣}$　　(د) ٩

(١٢) إذا كانت ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن ، الزاوية بينهما °٦٠

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢　　(ب) ٥　　(جـ) ٧　　(د) ٨

(١٣) مقدار $\overleftarrow{ق}$ فى وضع الاتزان = ... نيوتن.

بحيث $\overleftarrow{ق} \perp \overleftarrow{ش}$

(أ) $٢٥\sqrt{٣}$　　(ب) ٢٥

(جـ) ٥٠　　(د) $٢٥\sqrt{٢}$

(١٤) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ٦ سم وارتفاعه الجانبى = ٥ سم

فإن حجم الهرم = ... سم^٣.

(أ) ٣٢　　(ب) ٨٠　　(جـ) ٤٨　　(د) ٦٤

(١٥) قوتان مقداراهما ٦ ، ٨ نيوتن محصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...°

(أ) ٣٠　　(ب) ٩٠　　(جـ) ١٨٠　　(د) ٢٧٠

(١٦) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٥٠

(١٧) قوتان متعامدتان مقداراهما ٢ ق ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية محصلتهما ٢ $\sqrt{٥}$ نيوتن فإن : ق = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٨) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٩ ، ق والمحصلة تنصف الزاوية بينهما فإن : (٢ ق + ١) = ...

(أ) ٩ (ب) ١٩ (جـ) ١٨ (د) ١٧

(١٩) أثرت القوى ٨ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة فى اتجاه دورى واحد فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٧

(٢٠) فى الشكل المقابل :

فى وضع الاتزان فان : سـ − ق = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٤

(جـ) ١٦ (د) ١٨

ثانيًا | الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ كرة منتظمة ملساء طول نصف قطرها ١٠ سم ووزنها ٣٠ ث.جم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ١٠ سم مثبت طرفه الآخر على حائط رأسى أملس أوجد فى وضع الاتزان الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

---

٢ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٩ سم ، طول راسمه ١٥ سم أوجد حجمه.



١٤ إدارة أبنوب التعليمية **محافظة أسيوط**

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان متعامدتان مقداراهما ٥ ، ١٢ نيوتن فإن المحصلة لهما = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٣ (جـ) ١٥ (د) ١٧

(٢) قوتان متساويتان متلاقيتان فى نقطة واحدة مقدار كلا منهما ١٥ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما تساوى ....

(أ) 30° (ب) 45° (جـ) 60° (د) 120°

(٣) هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه الجانبى ١٣ سم فإن حجمه = ... سم^3.

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ٤٠٠ (د) ٥٢٠

(٤) فى الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٣٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ١٢ سم ، ٥ سم وطرفا الخيط على خط أفقى واحد

فإن : $ش_1 + ش_2$ = ... ث.جم.

(أ) ٥٠ (ب) ٧٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٧٠

(٥) قوة مقدارها ٦٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية مقدارها ٣٠ نيوتن فإن مقدار القوة الأخرى = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) $30\sqrt{3}$ (جـ) $30\sqrt{5}$ (د) $60\sqrt{2}$

(٦) وضع جسم وزنه ١٠٠ ث.جم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية 60° وحفظ فى وضع الاتزان بواسطة قوة أفقية فإن مقدار هذه القوة تساوى .... نيوتن.

(أ) ٥٠ (ب) $50\sqrt{3}$ (جـ) ١٠٠ (د) $100\sqrt{3}$

(٧) مساحة الدائرة التى معادلتها : $(س - ٣)^2 + ص^2 - ٤٩ = ٠$ تساوى .... وحدة مساحة.

(أ) ٧ (ب) ٤٩ (جـ) ١٥٤ (د) ١٦٤

(٨) قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن إذا عكس وضع إحداهما فإن محصلتهما يصبح ٦ نيوتن فإن مقدار كلا منهما تساوى .... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٤

(٩) هرم سداسى منتظم حجمه ٢٠ $\sqrt{٣}$ سم وارتفاعه يساوى ٦ سم فإن مساحة قاعدته = ... سم^٢.

(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٠ (د) ٢٠ $\sqrt{٣}$

(١٠) مركز الدائرة : ٢ س^٢ + ٢ ص^٢ − ٦ ص − ٣٠ = ٠ هو ....

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (٠ ، ١,٥) (جـ) (٠ ، ٣) (د) (٠ ، −٣)

(١١) القوة التى تتزن مع القوتين المتعامدتين ٧ ، ٧ نيوتن قياس زاوية ميلها على إحدى القوتين ....

(أ) °٩٠ (ب) °١٢٠ (جـ) °١٣٥ (د) °١٥٠

(١٢) قوتان مقداراهما ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن ، وقياس الزاوية بينهما °١٨٠ فإن محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٤

(١٣) قوتان مقداراهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية والزاوية بينهما θ وكانت حتا θ = $\frac{-٤}{٥}$ فإن قياس الزاوية المحصورة بين المحصلة والقوة الأولى = ...°

(أ) صفر (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

(١٤) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٦ $\overleftarrow{ص}$ − $\overleftarrow{س}$ فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(١٥) النسبة بين المساحة الكلية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه إلى مساحته الجانبية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٤ : ٣

(١٦) إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ محور تماثل للدائرة التى معادلتها س^٢ + ص^٢ = ك وكانت أ ، ب تنتميان للدائرة حيث أ = (١ ، −٣) فإن : ب = ...

(أ) (−١ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (−٣ ، ٢)

(١٧) معادلة الدائرة التى محيطها ٦ π سم وتقع فى الربع الثانى وتمس محورى الاحداثيات هى ....

(أ) (س − ٣)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٩ (ب) (س + ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩

(جـ) (س + ٣)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٩ (د) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩

(١٨) علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى احد طرفى خيط خفيف والطرف الآخر مثبت فى نقطة فى حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة فى اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح فى وضع اتزان ويميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

فإن مقدار الشد فى الخيط = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٨ $\sqrt{٣}$ (د) ١٢

(١٩) قوتان مقداراهما ٣ ق ، ٢ ق نيوتن محصلتهما ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...°

(أ) ١٨٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٠٠ (د) صفر

(٢٠) قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإن ق التى تجعل المحصلة أصغر ما يمكن تساوى .... نيوتن.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

ثانيًا | الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد معادلة الدائرة التى فيها $\overline{أب}$ قطر حيث أ (٣ ، −٢) ، ب (٥ ، ٢)

---

٢ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٨ ثقل جرام يستند طرفه أ على حائط رأسى أملس وربط بخيط خفيف من نقطة حـ حيث ب حـ = ١٥ سم والطرف الآخر من الخيط ثبت على هذا الحائط الرأسى أعلى أ فى النقطة ء إذا كان القضيب يميل على الرأسى بزاوية ٦٠° فى وضع الاتزان أوجد **مقدار الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.**





١٥ إدارة سوهاج التعليمية — محافظة سوهاج

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قوتان ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن الزاوية بينهما θ حيث $\theta \in]\frac{\pi}{2} ، \pi[$
فإن محصلتهما $\in$ ....

(أ) $]2 ، 10]$ (ب) $]2 ، 10[$ (جـ) $]2 ، 14[$ (د) $[2 ، 14]$

② ثلاث قوى متساوية تؤثر فى نقطة مادية ومتزنة فإن قياس الزاوية بين كل منهما = ...°

(أ) ١٥٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

③ فى الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٨ نيوتن موضوع على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠ نيوتن يتزن الجسم تحت تأثير قوة أفقية مقدارها ق نيوتن

فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) $6\sqrt{3}$ (ب) $9\sqrt{3}$ (جـ) $27\sqrt{3}$ (د) $18\sqrt{3}$

④ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى فإن مقدار وزن الجسم = ... نيوتن.

(أ) ٣٦ (ب) $72\sqrt{3}$ (جـ) ٧٢ (د) $36\sqrt{3}$

⑤ مخروط دائرى قائم محيط قاعدته ١٢ π سم وطول راسمه ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... سم^3.

(أ) ١٤٤ π (ب) ٩٦ π (جـ) ٦٠ π (د) ٧٢ π

⑥ محيط الدائرة التى معادلتها : س^2 + ص^2 + ٢ س − ٢ ص − ٢ = صفر
هو .... وحدة طول.

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٤ π (د) ٨ π

(٧) هرم رباعى منتظم مساحته الكلية ٧٠ سم^2 ومساحته الجانبية ٤٥ سم^2

فإن ارتفاع الهرم = ... سم.

(أ) ٢,٥ (ب) $\sqrt{١٤}$ (جـ) $\sqrt{٥}$ (د) ٤,٥

(٨) جميع مجموعات القوى الآتية تكون متزنه ما عدا ؟ (جميع القوى مقدره بالنيوتن).

(أ) ١٠ ، ١٠ ، ٥ (ب) ٤ ، ٦ ، ٨ (جـ) ١١ ، ٧ ، ٨ (د) ٨ ، ٤ ، ١٤

(٩) أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوى

١٥ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ١٥ نيوتن

فى الأضلاع $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب

فإن محصلتها ح = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر

(١٠) قوة مقدارها ١٠ $\sqrt{٢}$ ثقل جرام تعمل فى اتجاه الجنوب الشرقى تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه الجنوب يساوى .... ثقل جرام.

(أ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

(١١) قوتان ٢ ق ، ٣ ق تؤثران فى نقطة ومحصلتهما ٥ ق فإن قياس الزاوية بينهما = ...°

(أ) صفر (ب) ٦٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٨٠

(١٢) هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٤٠ سم ، ارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية تساوى ....

(أ) ٢٠٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٢٦٠ (د) ٣٢٠

(١٣) عدد المستويات المارة بنقطتين معلومتين ....

(أ) واحد. (ب) اثنان.

(جـ) عدد لا نهائى. (د) لا يوجد مستويات.

(١٤) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته نق سم يساوى نصف طول راسمه ل سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^2.

(أ) ٢ π نق^2 ل (ب) $\frac{1}{2}$ π نق^2 ل (جـ) ٢ π نق^2 (د) π ل^2

(١٥) قوتان متساويتان ومتعامدتان ومقدار محصلتهما ١٠٠ نيوتن

فإن مقدار كل قوة = ... نيوتن.

(أ) ٥٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٥٠ $\sqrt{2}$ (د) ١٠٠ $\sqrt{2}$

(١٦) فى الشكل المقابل :

ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم معلق بخيطين طولهما ٩٠ سم

، ١٢٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد

البعد بينهما ١٥٠ سم فإن : ($ش_١$ ، $ش_٢$) = ...

(أ) (١٢٠ ، ١٦٠) (ب) (١٦٠ ، ١٢٠)

(جـ) (١٢٠ ، ١٢٠) (د) (١٢٠ ، ١٢٠ $\sqrt{2}$)

١٥٠ سم ، ٩٠ سم ، ١٢٠ سم ، $ش_١$ ، $ش_٢$ ، ٢٠٠ ث.جم

(١٧) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ٧ ، ٨ ، ٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بين القوتين الثانية والثالثة = ... °

(أ) ١٥٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(١٨) قوتان مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ حيث $ق_١$ > $ق_٢$ ومحصلتهما ح والزاوية بينهما ١٢٠°

فإن الزاوية بين المحصلة و $ق_١$ يمكن أن تكون .... °

(أ) ٦٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٠ (د) ٨٠

(١٩) قوتان $ق_١$ ، $ق_٢$ ومحصلتهما ح حيث ح ∈ [٢ ، ١٤]

فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن إذا كانت القوتان متعامدتان.

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٢٠) فى الشكل المقابل :

دائرة مركزها نقطة الأصل ، $\overleftrightarrow{ب أ}$ مماسه للدائرة عند النقطة حـ

، أ حـ = ٩ وحدة طول ، حـ ب = ٤ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ = ٨١$ (ب) $س^٢ + ص^٢ = ١٦$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ = ٦٤$ (د) $س^٢ + ص^٢ = ٣٦$

ب ، حـ ، ٤ ، ٩ ، و ، أ

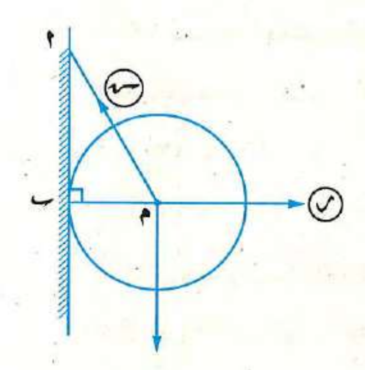
ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

1 أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة الماره بالنقطتين : أ (−٢ ، ٩) ، ب (٨ ، −١)
حيث $\overline{\text{أب}}$ قطر ؟

---

2 كرة منتظمة ملساء وزنها ٣٠ ث.جم وطول نصف قطرها ١٠ سم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ١٠ سم مثبت طرفه الآخر على حائط رأسى أملس فإذا كان ش هو الشد فى الخيط ، ر رد فعل الحائط فأوجد : ش + ر ؟




الإجابات

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الاستاتيكا

الاختبار الأول

1 ① (د) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ)

2 ق = ٨ نيوتن / قياس زاوية ميل المحصلة على ق = ٣٠°

3 ق = ٨ نيوتن

الاختبار الثانى

1 ① (أ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (د)

2 ق = ٤√٢ نيوتن ، ح = ٤ نيوتن

3 ٥٠ ، ٥٠√٣ نيوتن.

الاختبار الثالث

1 ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ)

2 ح = ١٥,١٦ ث.كجم ، هـ = ٣٠َ ٩٩°

3 ٢٢ ، ١٠ ث.كجم ، ح = ٢√٢٠١ ث.كجم

الاختبار الرابع

1 ① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ)

2 ١٠٠√٣ ث.جم ، ١٠٠√٣ ث.جم

3 أ = -١ ، ب = ١

الاختبار الخامس

1 ١٣٥° ، أثبت بنفسك.

2 ح = ٤√٢ نيوتن وتعمل فى إتجاه أحَ

3 س = (٢٠√٣)/٣ ث.جم ، ر = (١٠√٣)/٣ ث.جم

4 ٩√٧ نيوتن ، √٧ نيوتن.

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الهندسة والقياس

الاختبار الأول

1 ① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (د)

2 ① المستويان أبحء ، أَبَحَءَ

(يوجد إجابات أخرى)

② المستويان أبخء ، أببَأَ

(يوجد إجابات أخرى)

③ المستقيمان أب↔ ، بَحَ↔

(يوجد إجابات أخرى)

④ أب↔ ، المستوى أَبَحَءَ

(يوجد إجابات أخرى)

⑤ أب↔

الاختبار الثانى

1 ① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د)

2 ① المساحة الجانبية = ٨٠٠ سم²

② الحجم = (٤٠٠٠√٣)/٣ سم³

3 المساحة الكلية = ٥٧٦√٣ سم²

الاختبار الثالث

1 ① (أ) ② (أ) ③ (د) ④ (د)

2 ارتفاعه الجانبى = ١٥ سم

المساحة الجانبية = ٥٤٠ سم²

3 ١٤ سم

الاختبار الرابع

1 ① (أ) ② (جـ) ③ (أ) ④ (د)

2 س² + ص² + ٤س − ١٠ص − ٥ = ٠

3 ① المساحة الكلية = ٩٦π سم²

② الحجم = ٩٦π سم³

إجابات اختبارات شهر أكتوبر

اختبار ١

١ (١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (د) (٥) (أ) (٦) (د)

٢

(١) ∵ المركبتان متعامدتان

∴ ق١ = ١٨ جتا ٦٠° = ٩ نيوتن

، ق٢ = ١٨ جا ٦٠° = ٩ √٣ نيوتن

(٢) نعتبر م س⃖ هو اتجاه القوة الأولى

∴ س = ١ × جتا ٠° + ٢ × جتا ٦٠° + √٣ × جتا ٩٠° = ١ + ٢ × ١/٢ + √٣ × صفر = ٢

، ص = ١ × جا ٠° + ٢ × جا ٦٠° + √٣ × جا ٩٠° = ١ × صفر + ٢ × √٣/٢ + √٣ = ٢ √٣

∴ ح = ٢ س⃖ + ٢ √٣ ص⃖

∴ ح = √((٢)² + (٢√٣)²) = ٤ نيوتن

، ظا هـ = ٢√٣ / ٢ = √٣

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة ٤ نيوتن وتعمل في اتجاه م ب⃖

اختبار ٢

١ (١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (ب) (٥) (د) (٦) (د)

٢

(١) من الشكل نجد أن :

جا هـ = ٠,٨

، جتا هـ = ٠,٦

∴ ق١ = ٤٠ جا(٩٠° − هـ) / جا(١٨٠° − هـ) = ٤٠ جتا هـ / جا هـ = (٤٠ × ٠,٦) / ٠,٨ = ٣٠ نيوتن

، ق٢ = ٤٠ جا ٩٠° / جا(١٨٠° − هـ) = (٤٠ × ١) / جا هـ = ٤٠ / ٠,٨ = ٥٠ نيوتن

(٢) س = ١٠ جتا ٠° + ٢٠ جتا ١٢٠° + ٣٠ جتا ٢٤٠° = −١٥

، ص = ١٠ جا ٠° + ٢٠ جا ١٢٠° + ٣٠ جا ٢٤٠° = −٥ √٣

∴ ح = −١٥ س⃖ − ٥ √٣ ص⃖

∴ ح = √(٢٢٥ + ٧٥) = ١٠ √٣ نيوتن

، ظا هـ = ص/س = −٥√٣ / −١٥ = ١/√٣

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ هـ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

إجابات اختبارات شهر نوفمبر

اختبار ١

١ (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (أ) (٤) (أ) (٥) (د) (٦) (د)

٢

(١) (١) في Δ م ن هـ :

∵ م ن = √((٢٥)² − (٢٠)²) = ١٥ سم

∴ الارتفاع = ١٥ سم

(٢) المساحة الجانبية = ١/٢ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= ١/٢ × (٤ × ٤٠ × ٢٥) = ٢٠٠٠ سم²

(٣) المساحة الكلية = ٢٠٠٠ + (٤٠)²

= ٣٦٠٠ سم²

(٤) الحجم = ١/٣ × (٤٠)² × ١٥ = ٨٠٠٠ سم³

(٢) ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ خط عمل ر يمر بالنقطة هـ

∵ ء منتصف أب

، ءهـ // أحـ

∴ هـ منتصف بحـ

، بحـ = ٦٠ √٢ سم (فيثاغورس)

، Δ أهـحـ مثلث القوى حيث :

أهـ = ١/٢ بحـ = ٣٠ √٢ سم

، هـحـ = ٣٠ √٢ سم

، أحـ = ٦٠ سم

∴ ر / ٣٠√٢ = ش / ٣٠√٢ = ٤٠ / ٦٠

∴ ر = ش = ٢٠ √٢ نيوتن

اختبار ٢

١ (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (أ) (٥) (جـ) (٦) (أ)

٢

(١) (١) ∵ مساحة القاعدة = π نق²

∴ ٣٦ π = π نق²

∴ نق = ٦ سم

، ∵ المساحة الجانبية = π نق ل = π × ٦ × ١٠ = ٦٠ π سم²

(٢) المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

= π × ٦ × (١٠ + ٦)

= ٩٦ π سم²

، ع = √((١٠)² − (٦)²) = ٨ سم

(٣) الحجم = ١/٣ π نق² ع

= ١/٣ × π × (٦)² × ٨ = ٩٦ π سم³

(٢) ∵ (٦٠)² + (٨٠)² = (١٠٠)²

∴ Δ أبحـ قائم الزاوية في حـ

، باستخدام قاعدة لامي :

٢٠٠ / جا ٩٠° = ش١ / جا هـ١ = ش٢ / جا هـ٢

، ∵ جا هـ١ = بحـ / أب = ٨٠ / ١٠٠ = ٤/٥

، جا هـ٢ = أحـ / أب = ٦٠ / ١٠٠ = ٣/٥

∴ ٢٠٠ / ١ = ش١ / (٤/٥) = ش٢ / (٣/٥)

∴ ش١ = ٢٠٠ × ٤/٥ = ١٦٠ ث جم

، ش٢ = ٢٠٠ × ٣/٥ = ١٢٠ ث جم.

إجابات امتحان الكتاب المدرسى

١

① (أ)	② (د)	③ (د)	④ (ب)

٢

(أ) أ = −١ ، ب = ١

(ب) $١٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم ، $١٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم

٣

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٢ص - ٤ = ٠$

(ب) $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم

٤

(أ) ٢٢,٩٥٩ سم

(ب) ١٢٠ ث.جم ، ٩٠ ث.جم

٥

(أ) $ح = \sqrt{٦٥١}$ نيوتن ، هـ ≃ ٩َ ٤٠°

(ب) $١٥\sqrt{٢}$ ، $١٥\sqrt{٢}$ نيوتن.

إجابات امتحانات مدارس المحافظات

١ محافظة القاهرة

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (أ)	③ (د)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (جـ)	⑫ (د)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (أ)	⑯ (د)
⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (أ)	⑳ (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

معادلة الدائرة هى :

$(س + ٤)^{٢} + (ص - ٨)^{٢} = (٢٥)^{٢} = ٦٢٥$

$ب أ = \sqrt{(-٤ - ٤)^{٢} + (٨ + ١)^{٢}} = \sqrt{١٤٥}$

∵ ب أ < نق

∴ يمكن للرادار رصد السفينة الواقعة عند ب لأن بعدها عن مركز الدائرة < نق

٢

شمال
(٢٠) نيوتن
٣٠°
(١٠) نيوتن
غرب
شرق
٦٠°
(٣٠) نيوتن
جنوب

$\overline{س} = ١٠ \text{ جتا } ٠° + ٢٠ \text{ جتا } ١٢٠° + ٣٠ \text{ جتا } ٢٤٠°$

= −١٥ نيوتن.

$\overline{ص} = ١٠ \text{ جا } ٠° + ٢٠ \text{ جا } ١٢٠° + ٣٠ \text{ جا } ٢٤٠°$

$= -٥\sqrt{٣}$ نيوتن.

∴ $\overline{ح} = -١٥ \overline{س} - ٥\sqrt{٣} \overline{ص}$

∴ $ح = \sqrt{٢٢٥ + ٧٥} = ١٠\sqrt{٣}$ نيوتن.

٢ محافظة الجيزة

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (د)	③ (د)	④ (أ)
⑤ (د)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (د)
⑨ (أ)	⑩ (د)	⑪ (د)	⑫ (جـ)
⑬ (جـ)	⑭ (ب)	⑮ (ب)	⑯ (ب)
⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (جـ)	⑳ (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

① وزنه ومقداره ٤٨٠ ث.جم رأسيًا إلى أسفل ويؤثر عند (ء) منتصف $\overline{أب}$

② القوة الأفقية $\overline{ق}$ عند ب

③ رد فعل المفصل عند أ ومقداره (ر)

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن والقوة الأفقية يتلاقيان فى النقطة م

∴ خط عمل قوة رد فعل المفصل يمر بالنقطة م أيضًا (أى فى اتجاه $\overleftarrow{م أ}$)

∴ △ حـ م أ هو مثلث القوى.

∴ $\frac{ق}{حـ م} = \frac{ر}{م أ} = \frac{٤٨٠}{أ حـ}$

، ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٣٠°

∴ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٧٠ سم

، ب حـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ ب = $٧٠\sqrt{٣}$ سم

، ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ، $\overleftarrow{ءم} // \overline{أحـ}$

∴ م منتصف $\overline{\text{ب ح}}$

∴ م ح = ٣٥ $\sqrt{٣}$ سم

∴ أ م = $\sqrt{(٧٠)^{٢} + (٣٥\sqrt{٣})^{٢}}$ = ٣٥ $\sqrt{٧}$ سم

∴ $\frac{ق}{٣٥\sqrt{٣}} = \frac{ر}{٣٥\sqrt{٧}} = \frac{٤٨٠}{٧٠}$

∴ ق = ٢٤٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم ، ر = ٢٤٠ $\sqrt{٧}$ ث.جم.

، ∵ Δ أ م ح قائم الزاوية فى ح

∴ ظا (∠ أ م ح) = $\frac{\text{أ ح}}{\text{م ح}} = \frac{٧٠}{٣٥\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

∴ ق (∠ أ م ح) ≃ ٦ َ ٤٩°

∴ رد فعل المفصل يصنع زاوية قياسها ٦ َ ٤٩° مع الأفقى.

٢

∵ طول قطرها ٨ وحدات طولية

∴ نق = ٤

∴ معادلة الدائرة هى :

(س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٤^{٢}

س^{٢} + ٤ س + ٤ + ص^{٢} − ٦ ص + ٩ − ١٦ = ٠

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ٦ ص − ٣ = ٠

٣ محافظة الاسكندرية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (ج)	③ (د)	④ (ج)
⑤ (أ)	⑥ (د)	⑦ (أ)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (ب)	⑪ (د)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (د)	⑯ (د)
⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (ج)	⑳ (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى

∴ ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ جتا ى = ٠

∴ ق + ق $\sqrt{٢}$ جتا ى = ٠

بالقسمة ÷ ق : ١ + $\sqrt{٢}$ جتا ى = ٠

∴ جتا ى = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ى = ١٣٥°

٢

نق = م أ = $\sqrt{(٧ - ٣)^{٢} + (-٥ - ٢)^{٢}}$

∴ نق = $\sqrt{٦٥}$

معادلة الدائرة هى

(س − ٧)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = $(\sqrt{٦٥})^{٢}$

س^{٢} − ١٤ س + ٤٩ + ص^{٢} + ١٠ ص + ٢٥ − ٦٥ = ٠

س^{٢} + ص^{٢} − ١٤ س + ١٠ ص + ٩ = ٠

٤ محافظة القليوبية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ج)	② (ج)	③ (د)	④ (ب)
⑤ (ب)	⑥ (أ)	⑦ (ج)	⑧ (أ)
⑨ (ج)	⑩ (د)	⑪ (ج)	⑫ (ب)
⑬ (أ)	⑭ (ب)	⑮ (ب)	⑯ (ج)
⑰ (ب)	⑱ (د)	⑲ (أ)	⑳ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

نعتبر القوة التى مقدارها ٥ نيوتن تعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

∵ القوى متزنة

∴ س = ص = ٠

∴ س = ٥ جتا ٠ + ق جتا ٦٠°

+ ٣ جتا ١٢٠° + ك جتا ١٨٠° + ٧ جتا ٢٤٠° = ٠

∴ ٥ + $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{٣}{٢}$ − ك − $\frac{٧}{٢}$ = ٠

∴ ق − ٢ ك = ٠ (١)

، ص = ٥ جا ٠ + ق جا ٦٠° + ٣ جا ١٢٠°

+ ك جا ١٨٠° + ٧ جا ٢٤٠° = ٠

∴ ٠ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ + ٠ − $\frac{٧\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠

∴ ق = ٤ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) :

٤ − ٢ ك = ٠ ∴ ك = ٢

٢

∵ معادلة قاعدة المخروط الدائرى هى

س^{٢} + ص^{٢} = ٩

∴ طول نصف قطر قاعده = $\sqrt{٩}$ = ٣ سم

∵ ارتفاع الخيمة (المخروط) = ٢ $\sqrt{١٠}$

∴ ل = $\sqrt{(٣)^{٢} + (٢\sqrt{١٠})^{٢}}$

∴ ل = ٧ م

∵ المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٣ = ٦٦ م^{٢}

∴ سعر القماش المصنوع منه الخيمة

= ٦٦ × ٤٠ = ٢٦٤٠ جنيها

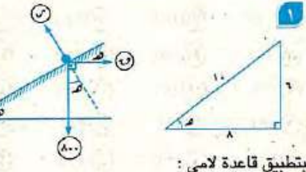
٥ محافظة الشرقية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (ب)	③ (د)	④ (ج)
⑤ (ج)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (ج)
⑨ (ب)	⑩ (د)	⑪ (د)	⑫ (ج)
⑬ (ج)	⑭ (ج)	⑮ (د)	⑯ (د)
⑰ (ب)	⑱ (ج)	⑲ (د)	⑳ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١



بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{٨٠٠}{\text{جا}(٩٠° + هـ)} = \frac{ر}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{ق}{\text{جا}(١٨٠° - هـ)}$

$\frac{٨٠٠}{\text{جتا هـ}} = \frac{ر}{١} = \frac{ق}{\text{جا هـ}}$

∴ ر = ٨٠٠ ÷ جتا هـ = ٨٠٠ × $\frac{١٠}{٨}$ = ١٠٠٠ ث.جم

، ق = ٨٠٠ × جا هـ ÷ جتا هـ = ٨٠٠ × $\frac{٦}{٨}$ = ٦٠٠ ث.جم

٢

معادلة الدائرة هى : (س − ٧)^{٢} + (ص + ٩)^{٢} = (٣٠)^{٢}

، ب أ = $\sqrt{(٢٥ - ٧)^{٢} + (-٣٠ + ٩)^{٢}}$ ≈ ٢٧,٦٦

، ∵ ب أ < نق

∴ يمكن للرادار رصد السفينة الواقعة عند «ب»

٦ محافظة المنوفية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (د)	③ (ج)	④ (ب)
⑤ (أ)	⑥ (ج)	⑦ (ج)	⑧ (أ)
⑨ (أ)	⑩ (د)	⑪ (ج)	⑫ (أ)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (ج)	⑯ (د)
⑰ (د)	⑱ (ج)	⑲ (ج)	⑳ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

بفرض $\overrightarrow{أب}$ فى اتجاه $\overrightarrow{و س}$

∴ س = ٢ جتا ٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ٨ جتا ٦٠°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جتا ٩٠° + ٤ جتا ١٢٠°

= ٢ × ١ + ٤$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٨ × $\frac{١}{٢}$ + ٢$\sqrt{٣}$

× ٠ + ٤ × $\frac{-١}{٢}$ = ١٠

، ص = ٢ جا ٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٨ جا ٦٠°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠°

= ٢ × ٠ + ٤$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢$\sqrt{٣}$

× ١ + ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠$\sqrt{٣}$

∴ $\overrightarrow{ح}$ = ١٠ $\overrightarrow{س}$ + ١٠$\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

∴ ح = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$ = ٢٠ ث.كجم

، ظا هـ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة ٢٠ ث.كجم واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع $\overrightarrow{أب}$ أى فى اتجاه $\overrightarrow{أء}$

٢

∵ نق = طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ١) على المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٢٣ = ٠

∴ نق = $\frac{|٣ × ١ + ٤ × ١ + ٢٣|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$ = ٦ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هى (س − ١)^٢ + (ص − ١)^٢ = ٣٦

٧ محافظة الغربية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (جـ)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (أ)	(٧) (جـ)	(٨) (ب)
(٩) (أ)	(١٠) (د)	(١١) (جـ)	(١٢) (د)
(١٣) (جـ)	(١٤) (أ)	(١٥) (جـ)	(١٦) (د)
(١٧) (جـ)	(١٨) (أ)	(١٩) (د)	(٢٠) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

حسب قاعدة لامى يكون :

$\frac{ش}{جا ١٥٠°} = \frac{ر}{جا ١٢٠°} = \frac{٧٥}{جا ٩٠°}$

∴ ش = ٣٧,٥ ث.جم

، ر = ٣٧,٥$\sqrt{٣}$ ث.جم

٢

∵ معادلة الدائرة هى

س^٢ + ص^٢ + ٦ س − ٨ ص − ١١ = ٠

∴ مركز الدائرة = (−٣ ، ٤)

نق = $\sqrt{(-٣)^٢ + ٤^٢ - (-١١)}$ = ٦ وحدة طول

البعد العمودى بين المركز والخط المستقيم

ل = $\frac{|٥ × -٣ + ١٢ × ٤ - ٧|}{\sqrt{٥^٢ + ١٢^٢}}$ = ٢ وحدة طول

∵ ل < نق

∴ المستقيم قاطع للدائرة فى نقطتين

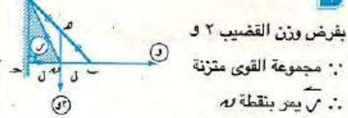
٨ محافظة الدقهلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (ب)	(٣) (جـ)	(٤) (أ)
(٥) (ب)	(٦) (ب)	(٧) (جـ)	(٨) (د)
(٩) (د)	(١٠) (جـ)	(١١) (أ)	(١٢) (جـ)
(١٣) (أ)	(١٤) (أ)	(١٥) (جـ)	(١٦) (جـ)
(١٧) (جـ)	(١٨) (أ)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١



بفرض وزن القضيب ٢ و

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overrightarrow{ر}$ يمر بنقطة ن

∴ Δ أ ن حـ هو مثلث القوى

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ $\frac{و}{ل} = \frac{٢ و}{أحـ} = \frac{ر}{أن}$ ∴ أحـ = ٢ ل

، ∵ هـ منتصف $\overline{أب}$ ، $\overline{هـ ن}$ // $\overline{أحـ}$

∴ ن منتصف $\overline{ب حـ}$ ∴ ب حـ = ٢ ل

∴ ق(∠ب أ حـ) = ٤٥°

∴ الساق تميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥°

٢

∵ المساحة الجانبية = ٢٦٠ سم^٢

∴ $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى = ٢٦٠

وبفرض طول ضلع القاعدة = ل سم

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٤ ل × ١٣ = ٢٦٠

∴ ل = ١٠ سم

∴ ع = $\sqrt{١٣^٢ - ٥^٢}$ = ١٢ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

= $\frac{١}{٣}$ × ١٠^٢ × ١٢ = ٤٠٠ سم^٣

٩ محافظة دمياط

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (ب)	(٣) (جـ)	(٤) (د)
(٥) (ب)	(٦) (د)	(٧) (أ)	(٨) (أ)
(٩) (ب)	(١٠) (جـ)	(١١) (ب)	(١٢) (جـ)
(١٣) (ب)	(١٤) (ب)	(١٥) (د)	(١٦) (ب)
(١٧) (جـ)	(١٨) (جـ)	(١٩) (ب)	(٢٠) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ٤٠٠ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ١٢

∴ مساحة القاعدة = ١٠٠ سم^٢

∴ طول ضلع القاعدة = ١٠ سم

، ارتفاعه الجانبى

= $\sqrt{٥^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٣ سم

، ∵ مساحته الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٠) × ١٣ = ٢٦٠ سم^٢

٢

∵ (٦٠)^٢ + (٨٠)^٢

= (١٠٠)^٢

∴ Δ أ حـ ب قائم الزاوية فى حـ

، من قاعدة لامى : ∴ $\frac{٢٠٠}{جا ٩٠°} = \frac{ش_١}{جا هـ_١} = \frac{ش_٢}{جا هـ_٢}$

، ∵ جا هـ$_١$ = $\frac{ب حـ}{أب} = \frac{٨٠}{١٠٠} = \frac{٤}{٥}$

، جا هـ$_٢$ = $\frac{أحـ}{أب} = \frac{٦٠}{١٠٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{٢٠٠}{١} = \frac{ش_١}{\frac{٤}{٥}} = \frac{ش_٢}{\frac{٣}{٥}}$

∴ ش$_١$ = ٢٠٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ١٦٠ ث.جم

، ش$_٢$ = ٢٠٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ١٢٠ ث.جم

١٠ محافظة كفر الشيخ

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (جـ)	(٣) (أ)	(٤) (ب)
(٥) (جـ)	(٦) (ب)	(٧) (د)	(٨) (أ)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (جـ)	(١٢) (ب)
(١٣) (د)	(١٤) (د)	(١٥) (جـ)	(١٦) (جـ)
(١٧) (أ)	(١٨) (د)	(١٩) (أ)	(٢٠) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$\therefore \frac{ش}{٣٠} = \frac{١٠}{٢٠\sqrt{٣}} = \frac{ر}{٦٠}$

$\therefore$ ر $= \frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}$ ث.جم.

، ش $= \frac{٢٠}{٣}\sqrt{٣}$ ث.جم.

٢

فى Δ أ حـ م قائم الزاوية فى حـ

، ق(∠ أ م حـ) = ٣٠° $\therefore$ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ أ م

$\because$ أ حـ = ٦ سم $\therefore$ أ م = ١٢ سم

$\therefore$ ل = ١٢ سم

المساحة الجانبية = π ل نق = π × ١٢ × ٦

= ٧٢ π سم^{٢}

ارتفاع المخروط ع = $\sqrt{١٢^{٢} - ٦^{٢}}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

١١ محافظة الفيوم

اولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ) ② (د) ③ (ب) ④ (ب)

⑤ (د) ⑥ (جـ) ⑦ (د) ⑧ (ب)

⑨ (جـ) ⑩ (ب) ⑪ (أ) ⑫ (د)

⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (جـ) ⑯ (د)

⑰ (ب) ⑱ (جـ) ⑲ (د) ⑳ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$\because$ مجموعة القوى متزنة

، ر يمر بالنقطة ن

$\therefore$ Δ أ ن حـ هو مثلث القوى

بتطبيق قاعدة مثلث القوى

$\therefore \frac{٢٥}{ل} = \frac{٥٠}{أ حـ} = \frac{ر}{أ ن}$

$\therefore$ أ حـ = ٢ ل

$\because$ هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، $\overline{هـ ن} // \overline{أ حـ}$

$\therefore$ ن منتصف $\overline{ب حـ}$ $\therefore$ ب حـ = ٢ ل

$\therefore$ ق(∠ ب أ حـ) = ٤٥°

$\therefore$ الساق تميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥°

$\therefore \frac{٢٥}{ل} = \frac{ر}{\sqrt{٥}\,ل}$ $\therefore$ ر = ٢٥ $\sqrt{٥}$

٢

$\because$ محيط قاعدة الهرم = ٤٨ سم

$\therefore$ طول ضلع القاعدة = ٤٨ ÷ ٤ = ١٢ سم

ارتفاع الهرم = $\sqrt{١٠^{٢} - ٦^{٢}}$ = ٨ سم

المساحة الجانبية للهرم

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٨ × ١٠ = ٢٤٠ سم^{٢}

المساحة الكلية = ٢٤٠ + مساحة القاعدة

= ٢٤٠ + ١٢ × ١٢ = ٣٨٤ سم^{٢}

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × (١٢ × ١٢) × ٨ = ٣٨٤ سم^{٣}

١٢ محافظة بنى سويف

اولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (أ)

⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (ب)

⑨ (جـ) ⑩ (د) ⑪ (أ) ⑫ (جـ)

⑬ (ب) ⑭ (د) ⑮ (جـ) ⑯ (أ)

⑰ (أ) ⑱ (جـ) ⑲ (ب) ⑳ (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$\because$ محيط قاعدة المخروط = ٦ π

$\therefore$ ٢ π نق = ٦ π $\therefore$ نق = ٣ سم

$\because$ حجم لمخروط = ٢٧ π

$\therefore \frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = ٢٧ π

$\frac{١}{٣}$ × ٣^{٢} × ع = ٢٧ $\therefore$ ع = ٩ سم

٢



بتطبيق قاعدة لامى

$\frac{و}{جا(٣٠ + هـ)} = \frac{١٢}{جا ١٥٠} = \frac{١٢\sqrt{٣}}{جا(١٨٠ - هـ)}$ و نيوتن.

$\frac{و}{جا(٣٠ + هـ)} = \frac{١٢}{\frac{١}{٢}} = \frac{١٢\sqrt{٣}}{جا هـ}$

$\therefore$ جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\therefore$ هـ = ٦٠°

١٣ محافظة المنيا

اولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (د) ③ (د) ④ (أ)

⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (أ) ⑧ (أ)

⑨ (أ) ⑩ (د) ⑪ (د) ⑫ (جـ)

⑬ (ب) ⑭ (جـ) ⑮ (جـ) ⑯ (ب)

⑰ (أ) ⑱ (ب) ⑲ (أ) ⑳ (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

Δ أ ب م مثلث القوى

، $\because$ أ ب = $\sqrt{(٢٠)^{٢} - (١٠)^{٢}}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

$\therefore \frac{ش}{٢٠} = \frac{ر}{١٠} = \frac{٣٠}{١٠\sqrt{٣}}$

$\therefore$ ش = $\frac{٢٠ \times ٣٠}{١٠\sqrt{٣}}$ = ٢٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

، ر = $\frac{٣٠ \times ١٠}{١٠\sqrt{٣}}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

٢

إرتفاع المخروط = $\sqrt{١٥^{٢} - ٩^{٢}}$ = ١٢ سم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ π × ٩^{٢} × ١٢

= ٣٢٤ π

١٤ محافظة أسيوط

اولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (د) ③ (جـ) ④ (د)

⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (جـ) ⑧ (أ)

⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (جـ) ⑫ (أ)

⑬ (د) ⑭ (أ) ⑮ (د) ⑯ (أ)

⑰ (ب) ⑱ (جـ) ⑲ (أ) ⑳ (ب)

ثانيا | الأسئلة المقالية

١

مركز الدائرة هو منتصف $\overline{أب}$

$م = \left(\frac{٣ + ٥}{٢} ، \frac{-٢ + ٢}{٢}\right) = (٤ ، ٠)$

طول $\overline{أب} = \sqrt{(٣ - ٥)^٢ + (-٢ - ٢)^٢}$

$= ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ نق $= \sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هى $(س - ٤)^٢ + ص^٢ = ٥$

٢

∵ الحائط أملس

∴ $\overrightarrow{ر}$ ⊥ على الحائط

∵ مجموعة القوى متزنه

∴ خط عمل الشد يمر بنقطة تلاقى الوزن ورد الفعل فى و

من Δ أ و ن القائم الزاوية فى و

و ن $= \frac{١}{٢}$ أ ن $= ١٥$ سم

∴ Δ و ن حـ متساوى الساقين

∴ ق (∠ حـ و ن) $= ٣٠°$

بتطبيق قاعدة لامى

$\frac{ر}{جا ١٥٠} = \frac{ش}{جا ٩٠} = \frac{١٨}{جا ١٢٠}$

∴ ر $= ٦\sqrt{٣}$ ث.جم

، ش $= ١٢\sqrt{٣}$ ث.جم

١٥ محافظة سوهاج

أولا | أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (د)	③ (د)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (جـ)
⑬ (جـ)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (أ)
⑰ (د)	⑱ (ب)	⑲ (جـ)	⑳ (د)

ثانيا | الأسئلة المقالية

١

∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

∴ مركز الدائرة $م = \left(\frac{-٢ + ٨}{٢} ، \frac{٩ + (-١)}{٢}\right)$

∴ $م = (٣ ، ٤)$

نق $=$ م أ $= \sqrt{(-٢ - ٣)^٢ + (٩ - ٤)^٢} = ٥\sqrt{٢}$ سم

معادلة الدائرة هى

$(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = (٥\sqrt{٢})^٢$

$س^٢ - ٦ س + ٩ + ص^٢ - ٨ ص + ١٦ = ٥٠$

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى

$س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ٨ ص - ٢٥ = ٠$

٢

Δ أ ب م مثلث القوى

، ∵ أ ب $= \sqrt{(٢٠)^٢ - (١٠)^٢} = ١٠\sqrt{٣}$ سم

∴ $\frac{ش}{٢٠} = \frac{ر}{١٠} = \frac{٣٠}{١٠\sqrt{٣}}$

∴ ش $= \frac{٣٠ \times ٢٠}{١٠\sqrt{٣}} = ٢٠\sqrt{٣}$ ث.جم

، ر $= \frac{٣٠ \times ٢٠}{١٠\sqrt{٣}} = ١٠\sqrt{٣}$ ث.جم

∴ ش + ر $= ٢٠\sqrt{٣} + ١٠\sqrt{٣} = ٣٠\sqrt{٣}$ ث.جم



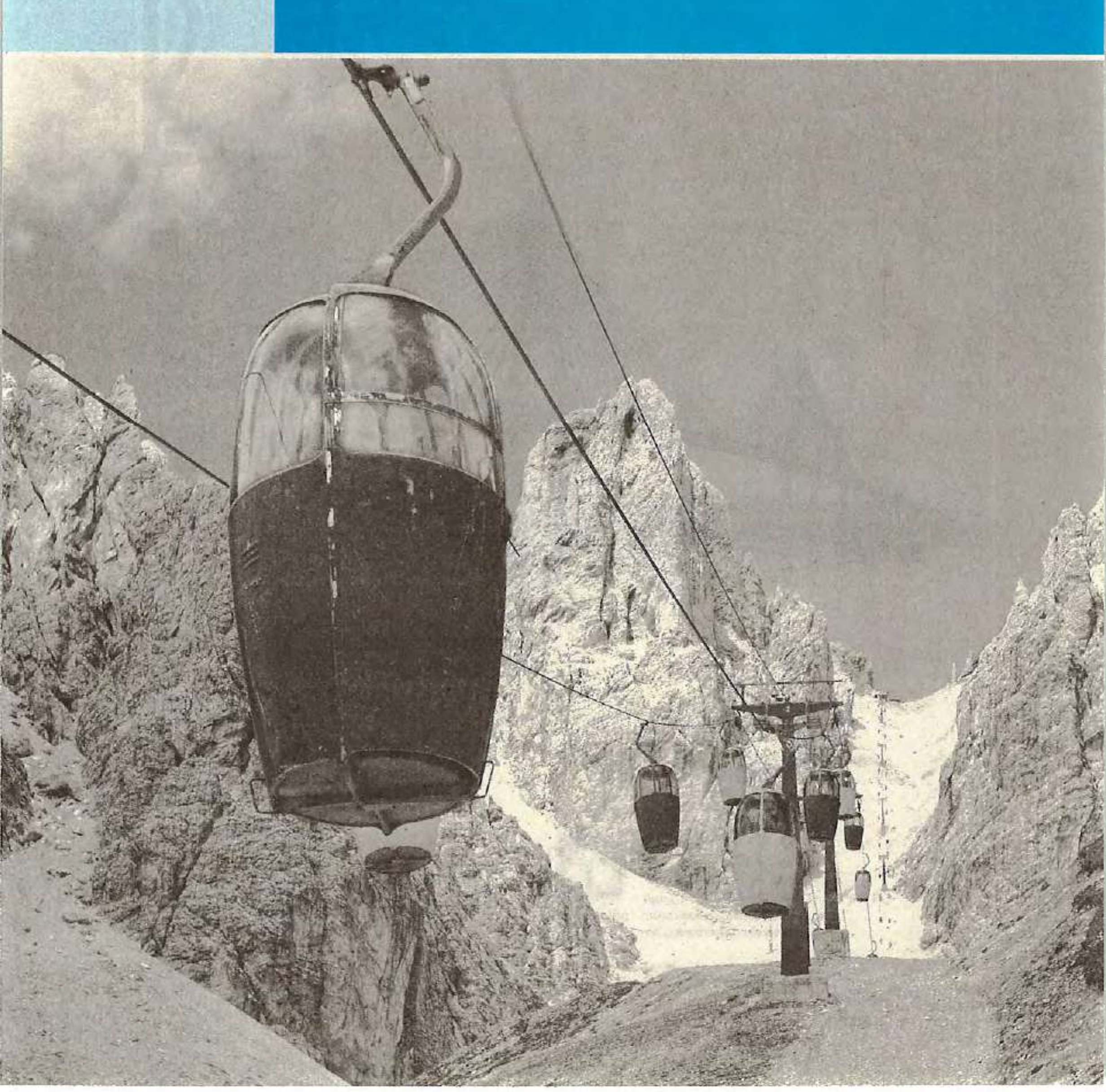
الجزء الخاص
بالإجـــابات



إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

إجابات تمارين
الاستاتيكا



إجابات تمرين تراكمى على المتجهات

١

① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (جـ)
⑥ (ب) ⑦ (د) ⑧ (د) ⑨ (جـ) ⑩ (جـ)
⑪ (أ) ⑫ (جـ) ⑬ (د) ⑭ (ب) ⑮ (د)
⑯ (جـ) ⑰ (أ) ⑱ (أ)

٢

$١٨\,\overrightarrow{\text{ى}}$ ، $٤٥\,\overrightarrow{\text{ى}}$ ، $-٥٠\,\overrightarrow{\text{ى}}$

٣

$\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $٢\,\overrightarrow{\text{ءم}}$ (أو $\overrightarrow{\text{ءب}}$) ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overrightarrow{\text{مب}}$

إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين 1

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (جـ)
⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (ب) ⑩ (جـ)
⑪ (ب) ⑫ (ب) ⑬ (أ) ⑭ (أ) ⑮ (جـ)
⑯ (د) ⑰ (ب) ⑱ (د) ⑲ (د) ⑳ (ب)
㉑ (جـ) ㉒ (جـ) ㉓ (جـ) ㉔ (جـ) ㉕ (د)
㉖ (ب) ㉗ (أ) ㉘ (جـ) ㉙ (د) ㉚ (جـ)
㉛ (أ) ㉜ (أ) ㉝ (ب) ㉞ (جـ) ㉟ (ب)
㊱ (ب) ㊲ (جـ) ㊳ (ب) ㊴ (د) ㊵ (جـ)
㊶ (أ) ㊷ (أ) ㊸ (ب) ㊹ (جـ) ㊺ (د)
㊻ (د) ㊼ (ب) ㊽ (جـ) ㊾ (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$\text{ع} = \sqrt{(٨)^٢ + (١٥)^٢} = ١٧$ ث.كجم

، $\text{ظا هـ} = \frac{١٥}{٨}$ ∴ $\text{هـ} = ٦١^\circ\ ٥٥'\ ٣٩''$

٢

بفرض مقدارى القوتين $\text{ق}_١$ ، $\text{ق}_٢$ نيوتن

∴ $(٥٠)^٢ = \text{ق}_١^٢ + \text{ق}_٢^٢$ ∴ $\text{ق}_١^٢ + \text{ق}_٢^٢ = ٢٥٠٠$ (١)

، ∵ $\text{ظا هـ} = \frac{\text{ق}_٢}{\text{ق}_١}$ ∴ $\frac{\text{ق}_٢}{\text{ق}_١} = \text{ظا}\ ٣٠^\circ$

∴ $\frac{\text{ق}_٢}{\text{ق}_١} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ $\text{ق}_١ = \sqrt{٣}\,\text{ق}_٢$ (٢)

∴ $\text{ق}_١^٢ = ٣\,\text{ق}_٢^٢$ (٣)

وبالتعويض من (٣) فى (١) :

∴ $٣\,\text{ق}_٢^٢ + \text{ق}_٢^٢ = ٢٥٠٠$ ∴ $٤\,\text{ق}_٢^٢ = ٢٥٠٠$

∴ $\text{ق}_٢^٢ = \frac{٢٥٠٠}{٤} = ٦٢٥$

∴ $\text{ق}_٢ = ٢٥$ نيوتن وبالتعويض فى (٢) :

∴ $\text{ق}_١ = ٢٥\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ مقدارا القوتين $٢٥\sqrt{٣}$ ، ٢٥ نيوتن

٣

$(٢٦)^٢ = (٣٠)^٢ + (١٦)^٢ + ٢ \times ٣٠ \times ١٦ \times \text{جتا ى}$

∴ $\text{جتا ى} = -\frac{١}{٢}$ ∴ $\text{ى} = ١٢٠^\circ$

٤

$(٣\sqrt{٧})^٢ = (٩)^٢ + (٦)^٢ + ٢ \times ٩ \times ٦\ \text{جتا ى}$

∴ $\text{جتا ى} = -\frac{١}{٢}$ ∴ $\text{ى} = ١٢٠^\circ$

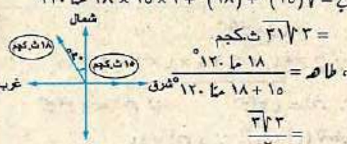
، $\text{ظا هـ} = \frac{٦\ \text{جا}\ ١٢٠^\circ}{٩ + ٦\ \text{جتا}\ ١٢٠^\circ} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\text{هـ} = ٤٠^\circ\ ٥٣'\ ٣٦''$

٥

$\text{ح} = \sqrt{(١٥)^٢ + (١٨)^٢ + ٢ \times ١٥ \times ١٨\ \text{جتا}\ ١٢٠^\circ}$

$= ٣\sqrt{٢١}$ ث.كجم



، $\text{ظا هـ} = \frac{١٨\ \text{جا}\ ١٢٠^\circ}{١٥ + ١٨\ \text{جتا}\ ١٢٠^\circ}$

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\text{هـ} = ٦٨^\circ\ ٥٦'\ ٥٤''$

٦

$\text{ى} = ١٢٠^\circ$ ، $\text{هـ} = ٣٠^\circ$

$\text{ظا}\ ٣٠^\circ = \frac{\text{ق}\ \text{جا}\ ١٢٠^\circ}{١٢ + \text{ق}\ \text{جتا}\ ١٢٠^\circ}$

∴ $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\text{ق} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{١٢ + \text{ق} \times -\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{٣}{٢}\,\text{ق} = ١٢ - \frac{١}{٢}\,\text{ق}$ ∴ $\text{ق} = ٦$ ث.كجم

، ع = √(١٢² + ٦² + ٢ × ١٢ × ٦ × جتا ١٢٠°)

∴ ع = ٦√٣ ث.كجم

حل آخر :

∵ المحصلة عمودية على القوة الثانية

∴ جتا ١٢٠° = −ق/١٢   ∴ ق = ٦ ث.كجم

∴ ع = √((١٢)² − (٦)²) = ٦√٣ ث.كجم

٧

بفرض أن ق١ هى القوة الصغرى ، ق٢ الكبرى

، ∵ المحصلة عمودية على ق١

∴ ق١ + ٣٠ جتا ى = ٠

∴ ق١ = ٣٠ × √٣/٢ = ١٥√٣ ث.كجم

، ع = √((١٥√٣)² + (٣٠)² + ٢ × ١٥√٣ × ٣٠ × −√٣/٢)

= ١٥ ث.كجم

٨

① ع = √((٥√٢)² + (٥)² + ٢ × ٥√٢ × ٥ جتا ٤٥°)

∴ ع = ٥√٥ نيوتن

، ظا ه = ٥ جا ٤٥° / (٥√٢ + ٥ جتا ٤٥°) = ١/٣

ه = ١٨° ٢٦َ ٦ً مع القوة الأولى

② ع = √(٣² + (٣√٢)² + ٢ × ٣ × ٣√٢ جتا ٤٥°)

∴ ع = ٣√٥ نيوتن

، ظا ه = ٣√٢ جا ٤٥° / (٣ + ٣√٢ جتا ٤٥°) = ١/٢

ه = ٢٦° ٣٣َ ٥٤ً مع القوة الأولى

③ ع = √((١٥٠)² + (١٥٠)² + ٢ × ١٥٠ × ١٥٠ جتا ١٢٠°)

∴ ع = ١٥٠ نيوتن

حل آخر :

ع = ٢ × ١٥٠ × جتا ٦٠° = ١٥٠ نيوتن

، المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين.

٩

(٤√٣)² = ق² + (٤)² + ٢ × ق × ٤ جتا ١٢٠°

∴ ق² − ٤ق − ٣٢ = ٠

∴ (ق + ٤) (ق − ٨) = ٠   ∴ ق = ٨ نيوتن

، ظا ه = ٤ جا ١٢٠° / (٨ + ٤ جتا ١٢٠°) = ١/√٣   ∴ ه = ٣٠°

١٠

∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى

∴ √٣ ق + ٢ ق جتا ى = صفر

∴ جتا ى = −√٣/٢   ∴ ى = ١٥٠°

، عند ق = ١٥

∴ ع = √((١٥√٣)² + (٣٠)² + ٢ × ١٥√٣ × ٣٠ جتا ١٥٠°)

= ١٥ نيوتن

١١

∵ المحصلة عمودية على القوة الثانية

∴ ع² = ق١² − ق٢²   ∴ ٢ = ٨ − ق٢²

∴ ق٢² = ٦   ∴ ق٢ = √٦ نيوتن

∵ ق٢ + ق١ جتا ى = ٠   ∴ √٦ + ٢√٢ جتا ى = ٠

∴ جتا ى = −√٦/(٢√٢) = −√٣/٢

∴ ى = ١٥٠°

١٢

∵ ظا ٣٠° = ق جا ١٢٠° / (١٦ + ق جتا ١٢٠°)   ∴ ١/√٣ = (√٣/٢ ق) / (١٦ − ½ ق)

∴ ١٦ − ½ ق = ٣/٢ ق   ∴ ٢ق = ١٦

∴ ق = ٨ ث.كجم

، ع = √((١٦)² + (٨)² + ٢ × ١٦ × ٨ جتا ١٢٠°)

= ٨√٣ ث.كجم

١٣

محصلة القوتين الأولى والثانية

= √((٥)² + (١٠)² + ٢ × ٥ × ١٠ جتا ٦٠°)

= ٥√٧ نيوتن

∴ القيمة العظمى لمحصلة القوى الثلاث

= ٥√٧ + ٤√٧ = ٩√٧ نيوتن

، القيمة الصغرى لمحصلة القوى الثلاث

= ٥√٧ − ٤√٧ = √٧ نيوتن

١٤

① ∵ (٣ق)²

= (٢ق)² + (٣ق)² + ٢ × ٢ق × ٣ق جتا ه

∴ ٩ق² = ١٣ق² + ١٢ق² جتا ه

∴ جتا ه = −١/٣   ∴ ه = ١٠٩° ٢٨َ ١٦ً

② ∵ المحصلة = ق = ٣ق − ٢ق

∴ الزاوية بين القوتين قياسها ١٨٠°

③ ∵ المحصلة = ٥ق = ٢ق + ٣ق

∴ الزاوية بين القوتين قياسها صفر°

④ (√١٣ ق)²

= (٢ق)² + (٣ق)² + ٢ × ٢ق × ٣ق جتا ه

∴ ١٣ق² = ١٣ق² + ١٢ق² جتا ه

∴ جتا ه = صفر   ∴ ه = ٩٠°

١٥

① ∵ اتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية

∴ ق + ٢ جتا ١٢٠° = ٠   ∴ ق = ١ نيوتن

② ∵ ظا ٤٥° = ٢ جا ١٢٠° / (ق + ٢ جتا ١٢٠°)   ∴ √٣ = ق − ١

∴ ق = (√٣ + ١) نيوتن

١٦

∵ ع ∈ [٢ ، ١٠]

∴ أصغر قيمة للمحصلة = ٢ نيوتن

∴ ق١ − ق٢ = ٢   (١)

، أكبر قيمة للمحصلة = ١٠ نيوتن

∴ ق١ + ق٢ = ١٠   (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٢ق١ = ١٢

∴ ق١ = ٦ نيوتن   ∴ ق٢ = ٤ نيوتن

∴ ع = √(٦² + ٤² + ٢ × ٦ × ٤ × جتا ١٢٠°)

= ٢√٧ نيوتن

١٧

بفرض القوتين ق ، ق + ٣

، ∵ المحصلة عمودية على القوة الصغرى

∴ ق + (ق + ٣) جتا ى = صفر   ∴ جتا ى = −ق/(ق + ٣)

، ∵ المحصلة = ٣√٣

∴ ٢٧ = ق² + (ق + ٣)² + ٢ × ق × (ق + ٣) × −ق/(ق + ٣)

∴ ٢٧ = ق² + ق² + ٦ق + ٩ − ٢ق²

∴ ق = ٣   ∴ القوتان مقدارهما ٣ ، ٦ نيوتن

، جتا ى = −٣/٦ = −١/٢   ∴ ى = ١٢٠°

١٨

بفرض القوتين ق١ ، ق٢

* فى الحالة الأولى : ١٠ = ق١² + ق٢²   (١)

* فى الحالة الثانية :

١٣ = ق١² + ق٢² + ٢ ق١ ق٢ × ½ وبالتعويض من (١) :

∴ ١٣ = ١٠ + ق١ ق٢   ∴ ق١ ق٢ = ٣

∴ ق$_٢$ = $\frac{٣}{ق_١}$ وبالتعويض فى (١) :

∴ ١٠ = ق$_١^٢$ + $\frac{٩}{ق_١^٢}$ ∴ ١٠ ق$_١^٢$ = ق$_١^٤$ + ٩

∴ ق$_١^٤$ − ١٠ ق$_١^٢$ + ٩ = ٠

∴ (ق$_١^٢$ − ٩) (ق$_١^٢$ − ١) = ٠

∴ القوتان هما ١ ، ٣ نيوتن

١٩

ح$_١$ = ٢ ق حتا $\frac{ى}{٢}$ = ١٢

∴ ق حتا $\frac{ى}{٢}$ = ٦ (١)

، ح$_٢$ = ٢ ق حتا $\left(\frac{١٨٠° − ى}{٢}\right)$ = ٦

منها ق حا $\frac{ى}{٢}$ = ٣ (٢)

بتربيع كل من المعادلتين وجمعهما

∴ ق^٢ حتا^٢ $\frac{ى}{٢}$ + ق^٢ حا^٢ $\frac{ى}{٢}$ = ٦^٢ + ٣^٢

∴ ق^٢ (حتا^٢ $\frac{ى}{٢}$ + حا^٢ $\frac{ى}{٢}$) = ٤٥

∴ ق = $\sqrt{٤٥}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ ث.كجم

٢٠

فى الحالة الأولى : ح^٢ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ٢ ق$_١$ ق$_٢$ حتا ١٢٠°

∴ ح^٢ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ − ق$_١$ ق$_٢$ (١)

وفى الحالة الثانية يصبح قياس الزاوية بين اتجاهى ق$_١$ ، ق$_٢$ هو ٦٠°

∴ ٣ ح^٢ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ق$_١$ ق$_٢$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ٣ (ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ − ق$_١$ ق$_٢$) = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ق$_١$ ق$_٢$

∴ ٢ ق$_١^٢$ + ٢ ق$_٢^٢$ − ٤ ق$_١$ ق$_٢$ = ٠

∴ ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ − ٢ ق$_١$ ق$_٢$ = ٠

∴ (ق$_١$ − ق$_٢$)^٢ = ٠ ∴ ق$_١$ = ق$_٢$

∴ ح$_١$ فى الحالة الأولى تصنع مع ق$_١$ زاوية قياسها ٦٠°

، ح$_٢$ فى الحالة الثانية تصنع مع ق$_١$ زاوية قياسها ٣٠° من الجهة الأخرى.

∴ قياس الزاوية بين المحصلتين = ٩٠°

٢١

ق$_١$ = (٤ ، ٠°) ، ق$_٢$ = (ق ، ى°) ، ح = (١٠ ، ٦٠°)

ح = ق$_١$ + ق$_٢$

∴ (١٠ حتا ٦٠° ، ١٠ حا ٦٠°) = (٤ حتا ٠° ، ٤ حا ٠°) + (ق حتاى ، ق حاى)

∴ (٥ ، ٥ $\sqrt{٣}$) = (٤ ، ٠) + (ق حتاى ، ق حاى)

∴ ق حتاى + ٤ = ٥ ∴ ق حتاى = ١ (١)

، ق حاى = ٥ $\sqrt{٣}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

∴ طاى = ٥ $\sqrt{٣}$

∴ حاى = $\frac{٥\sqrt{٣}}{\sqrt{٧٦}}$

وبالتعويض فى (٢) :

∴ ق × $\frac{٥\sqrt{٣}}{\sqrt{٧٦}}$ = ٥ $\sqrt{٣}$

∴ ق = $\sqrt{٧٦}$ = ٢ $\sqrt{١٩}$ نيوتن.

حل آخر :

بتطبيق قاعدة جيب التمام نجد أن :

ق^٢ = (١٠)^٢ + (٤)^٢ − ٢ × ٤ × ١٠ × حتا ٦٠° = ٧٦

∴ ق = ٢ $\sqrt{١٩}$ نيوتن.

٢٢

بفرض أن : ق$_١$ > ق$_٢$ ∴ ق$_١$ − ق$_٢$ = ١٥

∴ ق$_١$ = ١٥ + ق$_٢$ (١)

، (٣٥)^٢ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ٢ ق$_١$ ق$_٢$ × $\frac{-١}{٢}$

∴ ١٢٢٥ = (١٥ + ق$_٢$)^٢ + ق$_٢^٢$ − (١٥ + ق$_٢$) ق$_٢$

∴ ١٢٢٥ = ٢٢٥ + ق$_٢^٢$ + ٣٠ ق$_٢$ + ق$_٢^٢$ − ١٥ ق$_٢$ − ق$_٢^٢$

∴ ق$_٢^٢$ + ١٥ ق$_٢$ − ١٠٠٠ = ٠

∴ (ق$_٢$ + ٤٠) (ق$_٢$ − ٢٥) = ٠

∴ القوتان هما ٤٠ ، ٢٥ نيوتن

٢٣

ق$_١$ + ق$_٢$ = ٤ ∴ ق$_١$ = ٤ − ق$_٢$ (١)

، ١٣ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ٢ ق$_١$ ق$_٢$ حتا ٦٠°

وبالتعويض من (١) :

∴ ١٣ = (٤ − ق$_٢$)^٢ + ق$_٢^٢$ + (٤ − ق$_٢$) ق$_٢$

∴ ١٣ = ١٦ − ٨ ق$_٢$ + ق$_٢^٢$ + ق$_٢^٢$ + ٤ ق$_٢$ − ق$_٢^٢$

∴ ق$_٢^٢$ − ٤ ق$_٢$ + ٣ = ٠

∴ (ق$_٢$ − ١) (ق$_٢$ − ٣) = ٠

∴ القوتان هما : ١ ، ٣ نيوتن

٢٤

بفرض القوتين ق$_١$ ، ق$_٢$ حيث ق$_١$ < ق$_٢$

∴ ق$_١$ + ق$_٢$ = ٤٠ ومنها ق$_١$ = ٤٠ − ق$_٢$ (١)

، ∵ المحصلة = ٢٠ ث.كجم

∴ ٤٠٠ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ٢ ق$_١$ ق$_٢$ حتاى (٢)

، ∵ المحصلة عمودية على القوة الصغرى

∴ ق$_١$ + ق$_٢$ حتاى = ٠

∴ حتاى = $\frac{-ق_١}{ق_٢}$ وبالتعويض فى (٢)

∴ ٤٠٠ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ − ٢ ق$_١$ ق$_٢$ × $\frac{ق_١}{ق_٢}$

∴ ٤٠٠ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ − ٢ ق$_١^٢$

∴ ٤٠٠ = ق$_٢^٢$ − ق$_١^٢$ وبالتعويض من (١)

∴ ٤٠٠ = ق$_٢^٢$ − (٤٠ − ق$_٢$)^٢

∴ ٤٠٠ = ق$_٢^٢$ − ١٦٠٠ + ٨٠ ق$_٢$ − ق$_٢^٢$

∴ ٢٠٠٠ = ٨٠ ق$_٢$ ∴ ق$_٢$ = ٢٥ ث.كجم

وبالتعويض فى (١) :

∴ ق$_١$ = ١٥ ث.كجم ، حتاى = $\frac{-١٥}{٢٥}$ = $\frac{-٣}{٥}$

٢٥

ح$_١$ = ٢ ق حتا ٦٠° = ق

، ح$_٢$ = ٢ (٢ ق) حتا ٣٠° = ٢ $\sqrt{٣}$ ق

، ∵ ح$_٢$ − ح$_١$ = ١١ ∴ ٢ $\sqrt{٣}$ ق − ق = ١١

∴ ق = $\frac{١١}{٢\sqrt{٣} − ١}$ ∴ ق = ١ + ٢ $\sqrt{٣}$

٢٦

الحالة الأولى :

($\sqrt{٥}$ ق (م + ١))^٢

= ق^٢ + (٢ ق)^٢ + ٢ × ق × ٢ ق حتاى

∴ ٥ ق^٢ (م^٢ + ٢ م + ١) − ٥ ق^٢ = ٤ ق^٢ حتاى

∴ ٥ ق^٢ م (م + ٢) = ٤ ق^٢ حتاى (١)

الحالة الثانية :

($\sqrt{٥}$ ق (م − ١))^٢

= ق^٢ + (٢ ق)^٢ + ٢ × ق × ٢ ق × حتا (٩٠° − ى)

∴ ٥ ق^٢ (م^٢ − ٢ م + ١) − ٥ ق^٢ = ٤ ق^٢ حاى

∴ ٥ ق^٢ م (م − ٢) = ٤ ق^٢ حاى (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١) :

$\frac{٥ ق^٢ م (م − ٢)}{٥ ق^٢ م (م + ٢)}$ = $\frac{٤ ق^٢ حاى}{٤ ق^٢ حتاى}$ ∴ طاى = $\frac{م − ٢}{م + ٢}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د)	② (د)	③ (ب)	④ (د)
⑤ (أ)	⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (د)
⑨ (أ)	⑩ (د)	⑪ (جـ)	

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ القيمة العظمى $= ق_١ + ق_٢$

، والقيمة الصغرى $= ق_١ - ق_٢$ حيث $ق_١ > ق_٢$

$\therefore \frac{ق_١ + ق_٢}{ق_١ - ق_٢} = \frac{٧}{٣}$

$\therefore ٣ ق_١ + ٣ ق_٢ = ٧ ق_١ - ٧ ق_٢$

$\therefore ٤ ق_١ = ١٠ ق_٢ \quad \therefore \frac{ق_١}{ق_٢} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

∴ النسبة بين القوتين = ٥ : ٢

② $\because ق_١ : ق_٢ : ح = ٤ : ٣ : \sqrt{١٣}$

$\therefore ق_١ = ٤ م ، ق_٢ = ٣ م ، ح = \sqrt{١٣} م$

$\therefore (\sqrt{١٣} م)^٢ = (٤ م)^٢ + (٣ م)^٢ + ٢ (٤ م)(٣ م) جتا ى$

$\therefore جتا ى = \frac{١٣ م^٢ - ١٦ م^٢ - ٩ م^٢}{٢٤ م^٢} = \frac{-١}{٢}$

∴ قياس الزاوية بين القوتين $= جتا^{-١} \left(\frac{-١}{٢}\right) = ١٢٠°$

③ ∵ المحصلة $\perp ق_١$

$\therefore ق_١ + ق_٢ جتا ى =$ صفر

$\therefore جتا ى = \frac{-ق_١}{ق_٢}$

∴ قياس الزاوية بين القوتين $= جتا^{-١} \left(\frac{-ق_١}{ق_٢}\right)$

④ ∵ قياس الزاوية بين القوتين = ٩٠°

وإذا تساوت القوتين فإن المحصلة تنصف الزاوية

، ∵ القوتين غير متساويتين

∴ المحصلة تميل أكثر ناحية القوة الأكبر

∴ قياس الزاوية θ بين القوة الأكبر والمحصلة لابد وأن تكون أقل من ٤٥°

⑤ بتمثيل القوتين $\overrightarrow{ق_١} ، \overrightarrow{ق_٢}$ بمتوازي الأضلاع كما بالشكل

$\therefore \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد}$

$= \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{ح}$

$، \overrightarrow{ق_١} + (-\overrightarrow{ق_٢}) = \overrightarrow{أب} + (-\overrightarrow{أد}) = \overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أد}$

$= \overrightarrow{دب} = \overrightarrow{ح'}$

$\because \overrightarrow{ح} ، \overrightarrow{ح'}$ يمثلان بقطري المتوازي

∴ فى حالة تعامدهما يكون الشكل معيناً

∴ أب = أد منها $ق_١ = ق_٢$

⑥ $ح^٢ = ق^٢ + (٤)^٢ + ٢ (ق)(٤) جتا ١٢٠°$

$\therefore ح^٢ = ق^٢ - ٤ ق + ١٦$

$\therefore ح^٢ = (ق - ٢)^٢ + ١٢$

$\therefore ح = \sqrt{(ق - ٢)^٢ + ١٢}$

∴ أصغر قيمة للمحصلة تكون عندما ق = ٢

⑦ كلما زادت القوة $ق_٢$ كلما اقتربت المحصلة من القوة الأكبر التى تتضاعف وبالتالى تزداد الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الثانية أى أن $θ_٢ > θ_١$

⑧ $\because ق^٢ = ق^٢ + ٣ ق^٢ + ٢ (ق)(ق \sqrt{٣}) جتا ى$

$\therefore جتا ى = \frac{-\sqrt{٣}}{٢} \quad \therefore ى = ١٥٠°$

$، \because ظا هـ_١ = \frac{ق \sqrt{٣} جا ١٥٠°}{ق + ق \sqrt{٣} جتا ١٥٠°} = -\sqrt{٣}$

$\therefore هـ_١ = ١٢٠°$

وبالتالى $هـ_٢ = ١٥٠° - ١٢٠° = ٣٠°$

$\therefore هـ_١ = ٤ هـ_٢$

⑨ $\because ٣ \leq ق_١ \leq ١٢ \quad \therefore ٩ \leq ق_١^٢ \leq ١٤٤$ (١)

$، ٤ \leq ق_٢ \leq ١٦ \quad \therefore ١٦ \leq ق_٢^٢ \leq ٢٥٦$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore ٢٥ \leq ق_١^٢ + ق_٢^٢ \leq ٤٠٠$

$\therefore ٥ \leq ح \leq ٢٠$

⑩ $\because ١ \leq ق_١ \leq ٩ \quad ، \quad ٣ \leq ق_٢ \leq ٧$

$\therefore ٤ \leq ق_١ + ق_٢ \leq ١٦$ (١)

$\therefore ١ \leq ق_١ \leq ٩ ، -٧ \leq -ق_٢ \leq -٣$

$\therefore -٦ \leq ق_١ - ق_٢ \leq ٦$

$\therefore ٠ \leq |ق_١ - ق_٢| \leq ٦$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $٠ \leq ح \leq ١٦$

⑪ $\because ٥ \leq ق_١ \leq ٢٠$

$، ١٢ \leq ق_٢ \leq ٢١$

$\therefore ١٧ \leq ق_١ + ق_٢ \leq ٤١$

وتتحقق عندما θ = صفر

$، ٥^٢ + (١٢)^٢ \leq ق_١^٢ + ق_٢^٢ \leq (٢٠)^٢ + (٢١)^٢$

$\therefore ١٦٩ \leq ق_١^٢ + ق_٢^٢ \leq ٨٤١$

$\therefore ١٣ \leq \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢} \leq ٢٩$

وتتحقق عندما $θ = \frac{π}{٢}$

$\therefore ١٣ \leq ح \leq ٤١$

عندما $٠ \leq θ \leq \frac{π}{٢}$

٢

فى الحالة الأولى :

نفرض أن القوتين ق ، ٢ ق بينهما زاوية قياسها ى

$\therefore ظا هـ = \frac{٢ ق جا ى}{ق + ٢ ق جتا ى}$

$\therefore ظا هـ = \frac{٢ جا ى}{١ + ٢ جتا ى}$ (١)

، فى الحالة الثانية : القوة الأولى تصبح ق + ٤

، القوة الثانية = ٤ ق

$\therefore ظا هـ = \frac{٤ ق جا ى}{ق + ٤ + ٤ ق جتا ى}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{٢ جا ى}{١ + ٢ جتا ى} = \frac{٤ ق جا ى}{ق + ٤ + ٤ ق جتا ى}$

$\therefore \frac{١}{١ + ٢ جتا ى} = \frac{٢ ق}{ق + ٤ + ٤ ق جتا ى}$

$\therefore ق + ٤ + ٤ ق جتا ى = ٢ ق + ٤ ق جتا ى$

$\therefore ق + ٤ = ٢ ق \quad \therefore ق = ٤$ ثقل.كجم

∴ فى الحالة الأولى :

القوة الأولى مقدارها ٤ ث.كجم

، القوة الثانية مقدارها ٨ ث.كجم

$، ح_١ = \sqrt{١٦ + ٦٤ + ٢ \times ٤ \times ٨ جتا ى}$

$= ٤ \sqrt{٥ + ٤ جتا ى}$

، فى الحالة الثانية :

القوة الأولى مقدارها ٨ ث.كجم

، القوة الثانية مقدارها ١٦ ث.كجم

$، ح_٢ = \sqrt{٦٤ + ٢٥٦ + ٢ \times ٨ \times ١٦ جتا ى}$

$= ٨ \sqrt{٥ + ٤ جتا ى}$

$\therefore \frac{ح_١}{ح_٢} = \frac{٤ \sqrt{٥ + ٤ جتا ى}}{٨ \sqrt{٥ + ٤ جتا ى}} = \frac{١}{٢}$

٣

الحالة الأولى :

$ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى$ (١)

الحالة الثانية :

$٣ ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا (١٨٠° - ى)$

$\therefore ٣ ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ - ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى$ (٢)

وبضرب (١) × ٣ ثم طرح (٢) من (١) :

$\therefore$ صفر $= ٢ ق_١^٢ + ٢ ق_٢^٢ + ٨ ق_١ ق_٢ جتا ى$

$\therefore جتا ى = \frac{-ق_١^٢ - ق_٢^٢}{٤ ق_١ ق_٢}$ (٣)

وبفرض $هـ_١$ زاوية ميل ح على القوة $ق_١$

$\therefore ظا هـ_١ = \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى}$

ويفرض هـ_2 زاوية ميل $\text{ح}\sqrt{3}$ على ق_1

$\therefore \text{طا هـ}_2 = \dfrac{\text{ق}_2 \text{ جا}(180^\circ - \text{ى})}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا}(180^\circ - \text{ى})}$

$\therefore \text{طا هـ}_2 = \dfrac{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}{\text{ق}_1 - \text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$

، $\because \text{هـ}_1 + \text{هـ}_2 = 90^\circ$ $\quad \therefore \text{طا هـ}_1 = \text{ظتا هـ}_2$

$\therefore \dfrac{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا ى}} = \dfrac{\text{ق}_1 - \text{ق}_2 \text{ جتا ى}}{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}$

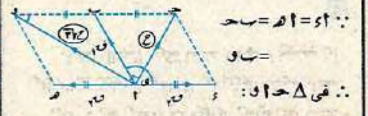
$\therefore \text{ق}_2^2 \text{ جا}^2 \text{ى} = \text{ق}_1^2 - \text{ق}_2^2 \text{ جتا}^2 \text{ى}$

$\therefore \text{ق}_2^2 (\text{جا}^2 \text{ى} + \text{جتا}^2 \text{ى}) = \text{ق}_1^2 \quad \therefore \text{ق}_2^2 = \text{ق}_1^2$

وبالتعويض فى (٢) : $\therefore \text{جتا ى} = \dfrac{-2\text{ق}_1^2}{4\text{ق}_1^2} = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \text{ى} = 120^\circ$

حل آخر :



$\because$ اء = اهـ = ب حـ

= ب و

$\therefore$ فى Δ حـ ا و :

$\because \text{ق}(\angle \text{حـ ا و}) = 90^\circ$

، $\because \overline{\text{ا ب}}$ متوسط خارج من رأس القائمة

$\therefore \text{ا ب} = \frac{1}{2} \text{ حـ و} = \text{حـ ب} = \text{ب و}$

$\therefore \text{ق}_1 = \text{ق}_2$

، $\because \text{طا}(\angle \text{حـ و ا}) = \dfrac{\text{ح}}{\text{ح}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{حـ و ا}) = 30^\circ \quad \therefore \text{ق}(\angle \text{ا حـ و}) = 60^\circ$

$\therefore \Delta$ ا ب حـ متساوى الأضلاع

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ا حـ ب}) = \text{ق}(\angle \text{حـ ا ب}) = \text{ق}(\angle \text{حـ ا ء})$

$= 60^\circ$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ى}) = 120^\circ$

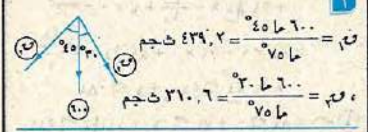
إجابات تمارين 2

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (د)	③ (د)	④ (د)	⑤ (جـ)
⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (ب)
⑪ (أ)	⑫ (جـ)	⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (د)
⑯ (جـ)	⑰ (جـ)	⑱ (جـ)	⑲ (جـ)	⑳ (أ)
㉑ (أ)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)	㉔ (ب)	㉕ (ب)
㉖ (ب)	㉗ (جـ)	㉘ (جـ)	㉙ (جـ)	㉚ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

1



$\text{ق}_1 = \dfrac{600 \text{ جا } 45^\circ}{\text{جا } 75^\circ} = 439,2$ ث جم

، $\text{ق}_2 = \dfrac{600 \text{ جا } 30^\circ}{\text{جا } 75^\circ} = 310,6$ ث جم

2



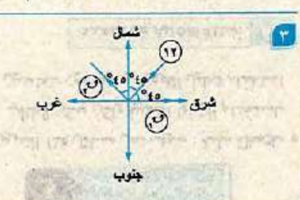
المركبة فى اتجاه الشمال $= 100 \text{ جا } 45^\circ$

$= 50\sqrt{2}$ ث جم

، المركبة فى اتجاه الغرب $= 100 \text{ جتا } 45^\circ$

$= 50\sqrt{2}$ ث جم

3



$\text{ق}_1 = \dfrac{12 \text{ جا } 90^\circ}{\text{جا } 135^\circ} = 12\sqrt{2}$ ث كجم

، $\text{ق}_2 = \dfrac{12 \text{ جا } 45^\circ}{\text{جا } 135^\circ} = 12$ ث كجم

4

$\text{ق}_1 = 160 \text{ جتا } 30^\circ$

$= 80\sqrt{3}$ ث جم

، $\text{ق}_2 = 160 \text{ جا } 30^\circ$

$= 80$ ث جم

5

$\text{ق}_1 = 300 \text{ جتا } 60^\circ = 150$ داين

، $\text{ق}_2 = 300 \text{ جا } 60^\circ = 150\sqrt{3}$ داين

6

$\text{ق}_1 = 18 \text{ جتا } 60^\circ = 9$ نيوتن

، $\text{ق}_2 = 18 \text{ جتا } 30^\circ = 9\sqrt{3}$ نيوتن

7

$\text{ق} = \dfrac{90 \text{ جا } 30^\circ}{\text{جا } 60^\circ}$

$= 30\sqrt{3}$ نيوتن

8

$\text{ق}_1 = 80 \text{ جتا } 60^\circ = 40$ نيوتن

، $\text{ق}_2 = 80 \text{ جتا } 30^\circ = 40\sqrt{3}$ نيوتن

9

$\because \text{طا ى} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \text{ى} = 150^\circ$

$\because \text{ق}_2 = \dfrac{\text{ح جا } 90^\circ}{\text{جا } 150^\circ}$

$\therefore \text{ح} = \dfrac{30 \text{ جا } 150^\circ}{\text{جا } 90^\circ} = 15$ نيوتن

، $\text{ق}_1 = \dfrac{15 \text{ جا } 60^\circ}{\text{جا } 150^\circ} = 15\sqrt{3}$ نيوتن

10

$\because \text{ق}_1 = \dfrac{\text{ق جا } 90^\circ}{\text{جا } 150^\circ}$

$\therefore \text{ق} = \dfrac{40 \text{ جا } 150^\circ}{\text{جا } 90^\circ}$

$= 20$ نيوتن

، $\text{ق}_2 = \dfrac{20 \text{ جا } 60^\circ}{\text{جا } 150^\circ} = 20\sqrt{3}$ نيوتن

11

$\text{ق}_1 = 42 \text{ جتا } 60^\circ$

$= 21$ نيوتن

، $\text{ق}_2 = 42 \text{ جا } 60^\circ$

$= 21\sqrt{3}$ نيوتن

12

$ق_{١} = ٦٠ \text{ جا } هـ = ٦٠ \times \frac{٣}{٥} = ٣٦$ نيوتن

، $ق_{٢} = ٦٠ \text{ جتا } هـ = ٦٠ \times \frac{٤}{٥} = ٤٨$ نيوتن

١٣

$ق_{١} = \frac{١٢٠ \text{ جا } ٤٨^\circ}{\text{جا}(٤٨^\circ + ٩٠^\circ)} = ١٣٣,٢٧$ ث.جم

$ق_{٢} = \frac{١٢٠ \text{ جا } ٩٠^\circ}{\text{جا}(٤٨^\circ + ٩٠^\circ)} = ١٧٩,٣٤$ ث.جم

١٤

$(٣٠)^٢ = (١٥\sqrt{٣})^٢ + (ق_{٢})^٢$

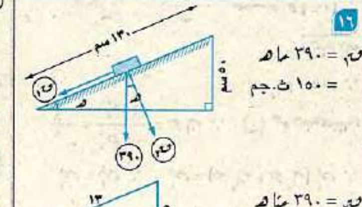
$\therefore ق_{٢} = ١٥$ نيوتن

١٥

$و_{١} = و_{٢} = \frac{٢٠ \text{ جا } ٨٥^\circ}{\text{جا}(٨٥^\circ + ٨٥^\circ)} = ١١٤,٧٤$ نيوتن

– عندما يقل قياس الزاوية مع الأفقى عن ٥° فإن مقدار مركبة الوزن فى اتجاهى الحبلين يزداد إلى أن يصبح لا نهائيًا عندما تكون الحبال أفقية.

١٦



$ق_{١} = ٣٩٠ \text{ جا } هـ = ١٥٠$ ث.جم

$ق_{٢} = ٣٩٠ \text{ جتا } هـ = ٣٦٠$ ث.جم

١٧

$ش_{١}$ فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

$\therefore ش_{١} = \frac{٥٠٠٠ \times \text{جا } ٣٠^\circ}{\text{جا } ٧٥^\circ} = ٢٥٨٨,٢$ نيوتن

، $ش_{٢}$ فى اتجاه $\overleftarrow{أحـ}$

$ش_{٢} = \frac{٥٠٠٠ \text{ جا } ٤٥^\circ}{\text{جا } ٧٥^\circ} = ٣٦٦٠,٣$ نيوتن

إجابات تمارين 3

* **ملاحظة هامة :** سوف نحل مسائل هذا التمرين باستخدام الزوايا القطبية ولكن يمكن للطالب استخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (د) (٥) (د)
(٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (جـ) (٩) (أ) (١٠) (جـ)
(١١) (د) (١٢) (جـ) (١٣) (د) (١٤) (د)
(١٥) أولاً : (ب) ثانيًا : (جـ) (١٦) (ب) (١٧) (جـ)
(١٨) (د) (١٩) (أ) (٢٠) (أ) (٢١) (جـ) (٢٢) (ب)
(٢٣) (أ) (٢٤) (ب)

ثانيًا: الأسئلة المقالية

١

(١) $س = ٢٧ \text{ جتا } ٠^\circ + ١٨ \text{ جتا } ٩٠^\circ + ١٢\sqrt{٢} \text{ جتا } ١٣٥^\circ + ١٥\sqrt{٢} \text{ جتا } ٢٢٥^\circ + ٩ \text{ جتا } ٢٧٠^\circ$

$= ٢٧ \times ١ + ١٨ \times ٠ + ١٢\sqrt{٢} \times -\frac{١}{\sqrt{٢}} + ١٥\sqrt{٢} \times -\frac{١}{\sqrt{٢}} + ٩ \times ٠ =$ صفر

، $ص = ٢٧ \text{ جا } ٠^\circ + ١٨ \text{ جا } ٩٠^\circ + ١٢\sqrt{٢} \text{ جا } ١٣٥^\circ + ١٥\sqrt{٢} \text{ جا } ٢٢٥^\circ + ٩ \text{ جا } ٢٧٠^\circ$

$= ٢٧ \times ٠ + ١٨ \times ١ + ١٢\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ١٥\sqrt{٢} \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} + ٩ \times -١ = ٦$

$\therefore \overrightarrow{ح} = ٦ \overleftarrow{ص}$ $\therefore ح = ٦$ نيوتن

∴ مقدار المحصلة ٦ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

(٢) $س = ٤ \text{ جتا } ٦٠^\circ + ٣\sqrt{٣} \text{ جتا } ٢٧٠^\circ + ٢\sqrt{٣} \text{ جتا } ٣٣٠^\circ$

$= ٤ \times \frac{١}{٢} + ٣\sqrt{٣} \times ٠ + ٢\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= ٥$

، $ص = ٤ \text{ جا } ٦٠^\circ + ٣\sqrt{٣} \text{ جا } ٢٧٠^\circ + ٢\sqrt{٣} \text{ جا } ٣٣٠^\circ$

$= ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٣\sqrt{٣} \times -١ + ٢\sqrt{٣} \times \frac{-١}{٢}$

$= -٢\sqrt{٣}$

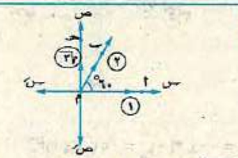
$\therefore \overrightarrow{ح} = ٥ \overleftarrow{س} - ٢\sqrt{٣} \overleftarrow{ص}$

$\therefore ح = \sqrt{(٥)^٢ + (-٢\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{٣٧}$ نيوتن

، $\text{ظا } هـ = \frac{-٢\sqrt{٣}}{٥}$ $\therefore هـ = ٣٢٥^\circ \; ١٧'$

∴ مقدار المحصلة $\sqrt{٣٧}$ نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها $٣٢٥^\circ \; ١٧'$ مع $\overleftarrow{و س}$

٢



نعتبر $\overleftarrow{م س}$ هو اتجاه القوة الأولى

$\therefore س = ١ \times \text{جتا } ٠^\circ + ٢ \times \text{جتا } ٦٠^\circ + \sqrt{٣} \times \text{جتا } ٩٠^\circ$

$= ١ + ٢ \times \frac{١}{٢} + \sqrt{٣} \times$ صفر $= ٢$

، $ص = ١ \times \text{جا } ٠^\circ + ٢ \times \text{جا } ٦٠^\circ + \sqrt{٣} \times \text{جا } ٩٠^\circ$

$= ١ \times$ صفر $+ ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

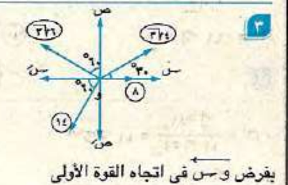
$\therefore \overrightarrow{ح} = ٢ \overleftarrow{س} + ٢\sqrt{٣} \overleftarrow{ص}$

$\therefore ح = \sqrt{(٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢} = ٤$ نيوتن

، $\text{ظا } هـ = \frac{٢\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$ $\therefore هـ = ٦٠^\circ$

∴ مقدار المحصلة ٤ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{م ب}$

٣



بفرض $\overleftarrow{و س}$ فى اتجاه القوة الأولى

$\therefore س = ٨ \text{ جتا } ٠^\circ + ٤\sqrt{٣} \text{ جتا } ٣٠^\circ + ٦\sqrt{٣} \text{ جتا } ١٥٠^\circ + ١٤ \text{ جتا } ٢٤٠^\circ = ٨ \times ١ + ٤\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٦\sqrt{٣} \times (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) + ١٤ \times (-\frac{١}{٢})$

$= ٨ + ٦ - ٩ - ٧ = -٢$

، $ص = ٨ \text{ جا } ٠^\circ + ٤\sqrt{٣} \text{ جا } ٣٠^\circ + ٦\sqrt{٣} \text{ جا } ١٥٠^\circ + ١٤ \text{ جا } ٢٤٠^\circ$

$= ٨ \times ٠ + ٤\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ٦\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ١٤ \times (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = -٢\sqrt{٣}$

$\therefore \overrightarrow{ح} = -٢ \overleftarrow{س} - ٢\sqrt{٣} \overleftarrow{ص}$

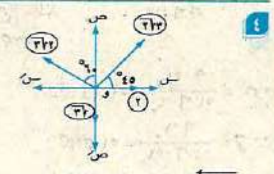
$\therefore ح = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٢\sqrt{٣})^٢} = ٤$ نيوتن

، $\text{ظا } هـ = \frac{-٢\sqrt{٣}}{-٢} = \sqrt{٣}$

، ∵ س ، ص سالبتان $\therefore هـ = ٢٤٠^\circ$

∴ مقدار المحصلة ٤ نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٢٤٠° مع $\overleftarrow{و س}$ أى فى اتجاه القوة الرابعة

٤



نعتبر $\overleftarrow{و س}$ فى اتجاه القوة الأولى

$\therefore س = ٢ \text{ جتا } ٠^\circ + ٣\sqrt{٢} \text{ جتا } ٤٥^\circ + ٢\sqrt{٣} \text{ جتا } ١٥٠^\circ + \sqrt{٣} \text{ جتا } ٢٧٠^\circ = ٢ \times ١ + ٣\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٢\sqrt{٣} \times \frac{-\sqrt{٣}}{٢} + \sqrt{٣} \times$ صفر $= ٢$

، $ص = ٢ \text{ جا } ٠^\circ + ٣\sqrt{٢} \text{ جا } ٤٥^\circ + ٢\sqrt{٣} \text{ جا } ١٥٠^\circ + \sqrt{٣} \text{ جا } ٢٧٠^\circ = ٢ \times$ صفر $+ ٣\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٢\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + \sqrt{٣} \times -١ = ٣$

∴ ح→ = ٢ س→ + ٣ ص→

∴ ح = √((٢)² + (٣)²) = √١٣ نيوتن

، طا هـ = ٣/٢ ∴ هـ = ٥٦° ١٩َ

∴ مقدار المحصلة √١٣ نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٥٦° ١٩َ مع و س→

أى بين القوتين الثانية والثالثة وتصنع زاوية قياسها ١١° ١٩َ مع القوة الثانية

٥

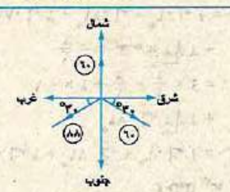
∵ س = ٩ جتا ٠° + ٦ جتا ٩٠° + ٤√٢ جتا ١٣٥° + ٥√٢ جتا ٢٢٥° + ٥ جتا ٢٧٠° = ٩ × ١ + ٦ × صفر + ٤√٢ × (-١/√٢) + ٥√٢ × (-١/√٢) + ٥ × صفر = صفر

، ص = ٩ جا ٠° + ٦ جا ٩٠° + ٤√٢ جا ١٣٥° + ٥√٢ جا ٢٢٥° + ٥ جا ٢٧٠°

= ٩ × صفر + ٦ × ١ + ٤√٢ × ١/√٢ + ٥√٢ × (-١/√٢) + ٥ × -١ = صفر

∴ ح→ = ٠→ ∴ المجموعة متزنة

٦



∵ س = ٦٠ جتا ٩٠° + ٨٨ جتا ٢١٠° + ٦٠ جتا ٣٣٠°

= ٦٠ × صفر + ٨٨ × (-√٣/٢) + ٦٠ × √٣/٢

= -١٤√٣

، ص = ٦٠ جا ٩٠° + ٨٨ جا ٢١٠° + ٦٠ جا ٣٣٠°

= ٦٠ × ١ + ٨٨ × -١/٢ + ٦٠ × -١/٢ = -١٤

∴ ح→ = -١٤√٣ س→ - ١٤ ص→

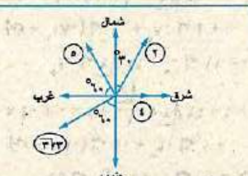
∴ ح = √((-١٤√٣)² + (-١٤)²) = ٢٨ ث.جم

، طا هـ = -١٤/(-١٤√٣) = ١/√٣

، ∵ س ، ص سالبتان ∴ هـ = ٢١٠°

∴ مقدار المحصلة ٢٨ ث.جم وفى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب

٧



∵ س = ٤ جتا ٠° + ٢ جتا ٦٠° + ٥ جتا ١٢٠° + ٣√٣ جتا ٢١٠° = ٤ × ١ + ٢ × ١/٢ + ٥ × -١/٢ + ٣√٣ × (-√٣/٢) = -٢

، ص = ٤ جا ٠° + ٢ جا ٦٠° + ٥ جا ١٢٠° + ٣√٣ جا ٢١٠° = ٤ × صفر + ٢ × √٣/٢ + ٥ × √٣/٢ + ٣√٣ × -١/٢ = ٢√٣

∴ ح→ = -٢ س→ + ٢√٣ ص→

∴ ح = √((٢)² + (٢√٣)²) = ٤ نيوتن

، طا هـ = ٢√٣/-٢ = -√٣

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ هـ = ١٢٠°

٨

نعتبر و س→ فى اتجاه القوة الأولى

∴ س = ٢ ق جتا ٠° + ٣ ق جتا ١٢٠° + ٤ ق جتا ٢٤٠°

= ٢ ق × ١ + ٣ ق × -١/٢ + ٤ ق × -١/٢ = -١ ١/٢ ق

، ص = ٢ ق جا ٠° + ٣ ق جا ١٢٠° + ٤ ق جا ٢٤٠°

= ٢ ق × صفر + ٣ ق × √٣/٢ + ٤ ق × -√٣/٢

= -√٣/٢ ق

∴ ح→ = -١ ١/٢ ق س→ - √٣/٢ ق ص→

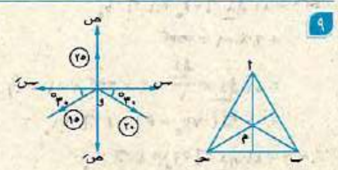
∴ ح = √((-٣/٢ ق)² + (-√٣/٢ ق)²) = √٣ ق نيوتن

، طا هـ = -√٣/٢ × ٢/-٣ = √٣/٣ ∴ هـ = ٢١٠°

∴ المحصلة مقدارها √٣ ق نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٢١٠° مع و س→

أى بين القوتين ٢ ق ، ٤ ق وعمودية على القوة ٣ ق

٩



بفرض و ص→ فى اتجاه القوة الثالثة

∴ س = ٢٥ جتا ٩٠° + ١٥ جتا ٢١٠° + ٢٠ جتا ٣٣٠°

= ٢٥ × صفر + ١٥ × -√٣/٢ + ٢٠ × √٣/٢

= ٢,٥√٣

، ص = ٢٥ جا ٩٠° + ١٥ جا ٢١٠° + ٢٠ جا ٣٣٠°

= ٢٥ × ١ + ١٥ × -١/٢ + ٢٠ × -١/٢ = ٧,٥

∴ ح→ = ٢,٥√٣ س→ + ٧,٥ ص→

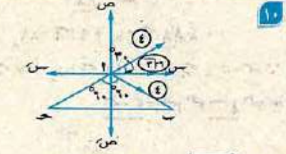
∴ ح = √((٢,٥√٣)² + (٧,٥)²) = ٥√٣ نيوتن

، طا هـ = ٧,٥/(٢,٥√٣) = √٣ ∴ هـ = ٦٠°

∴ المحصلة مقدارها ٥√٣ نيوتن واتجاهها يصنع مع و س→ زاوية قياسها ٦٠°

أى بين م أ→ ، م ب→ وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع م أ→

١٠



بفرض ص صَ محور تماثل Δ أ ب ح

، نقطة أ تنطبق على نقطة و

∴ س = ٦√٣ جتا ٠° + ٤ جتا ٣٠° + ٤ جتا ٣٣٠°

= ٦√٣ × ١ + ٤ × √٣/٢

+ ٤ × √٣/٢ = ١٠√٣

، ص = ٦√٣ جا ٠° + ٤ جا ٣٠° + ٤ جا ٣٣٠°

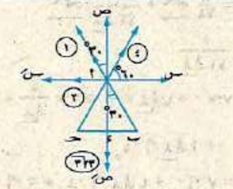
= ٦√٣ × صفر + ٤ × ١/٢ + ٤ × -١/٢ = صفر

∴ ح→ = ١٠√٣ س→

∴ ح = ١٠√٣ نيوتن وتعمل فى اتجاه و س→

أى فى اتجاه ح ب→

١١



بفرض ص ص′ محور تماثل Δ أ ب حـ ، نقطة أ تنطبق على نقطة و

∴ س = ٤ جتا ٦٠° + جتا ١٢٠° + ٢ جتا ١٨٠° + ٢$\sqrt{٣}$ جتا ٢٧٠°

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ + ٢ × −١ + ٢$\sqrt{٣}$ × صفر = −$\frac{١}{٢}$

، ص = ٤ جا ٦٠° + جا ١٢٠° + ٢ جا ١٨٠° + ٢$\sqrt{٣}$ جا ٢٧٠°

= ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ × صفر + ٢$\sqrt{٣}$ × −١ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\overrightarrow{ح}$ = −$\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{س}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\overrightarrow{ص}$

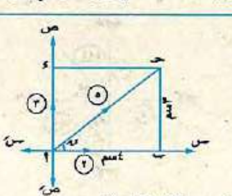
∴ ح = $\sqrt{(-\frac{١}{٢})^٢ + (-\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢}$ = ١ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ × −٢ = $\sqrt{٣}$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ هـ = ٢٤٠°

∴ مقدار المحصلة ١ نيوتن وتعمل في اتجاه $\overrightarrow{أحـ}$

١٢



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

∴ أحـ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = ٥ سم

∴ جتا ل = $\frac{٤}{٥}$ ، جا ل = $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ٢ جتا ٠° + ٥ جتا ل + ٣ جتا ٩٠°

= ٢ × ١ + ٥ × $\frac{٤}{٥}$ + ٣ × صفر = ٦

، ص = ٢ جا ٠° + ٥ جا ل + ٣ جا ٩٠°

= ٢ × صفر + ٥ × $\frac{٣}{٥}$ + ٣ × ١ = ٦

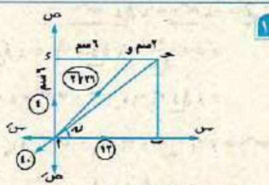
∴ $\overrightarrow{ح}$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$

∴ ح = $\sqrt{(٦)^٢ + (٦)^٢}$ = ٦$\sqrt{٢}$ ث.كجم

، ظا هـ = $\frac{٦}{٦}$ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ المحصلة مقدارها ٦$\sqrt{٢}$ ث.كجم وتصنع زاوية قياسها ٤٥° مع $\overrightarrow{أب}$

١٣



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

∴ أحـ = $\sqrt{٨^٢ + ٦^٢}$ = ١٠ سم

∴ جا ل = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا ل = $\frac{٤}{٥}$

∴ س = ١٢ جتا ٠° + ٢٦$\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٤ جتا ٩٠° + ٤٠ جتا (١٨٠° + ل)

= ١٢ × ١ + ٢٦$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ × ٠ + ٤٠ × $\frac{-٤}{٥}$ = ٦

، ص = ١٢ جا ٠° + ٢٦$\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٤ جا ٩٠° + ٤٠ جا (١٨٠° + ل)

= ١٢ × ٠ + ٢٦$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ × ١ + ٤٠ × $\frac{-٣}{٥}$ = ٦

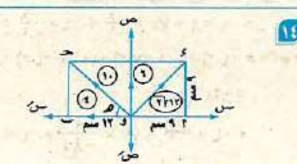
∴ $\overrightarrow{ح}$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$

∴ ح = $\sqrt{٦^٢ + ٦^٢}$ = ٦$\sqrt{٢}$ نيوتن

، ظا هـ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ مقدار المحصلة ٦$\sqrt{٢}$ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٤٥° مع $\overrightarrow{أب}$

١٤



∵ Δ أ د و متساوي الساقين وقائم الزاوية في أ

∴ ق(∠ أ و د) = ٤٥°

، ∵ Δ و ب حـ قائم الزاوية في ب

∴ وحـ = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٩)^٢}$ = ١٥ سم

∴ جتا هـ = $\frac{١٢}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٩}{١٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ١٢$\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٦ جتا ٩٠°

+ ١٠ جتا (١٨٠° − هـ) + ٤ جتا ١٨٠°

= ١٢$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٦ × صفر + ١٠ × $\frac{-٤}{٥}$

+ ٤ × −١ = صفر

، ص = ١٢$\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٦ جا ٩٠°

+ ١٠ جا (١٨٠° − هـ)

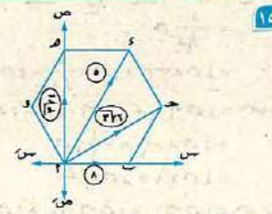
+ ٤ جا ١٨٠° = ١٢$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

+ ٦ × ١ + ١٠ × $\frac{٣}{٥}$ + ٤ × صفر = ٢٤

∴ $\overrightarrow{ح}$ = ٢٤ $\overrightarrow{ص}$ ∴ ح = ٢٤ ث.كجم

∴ مقدار المحصلة ٢٤ ث.كجم وتعمل في اتجاه $\overrightarrow{وص}$ أي في اتجاه $\overrightarrow{ب حـ}$

١٥



بفرض $\overrightarrow{أب}$ في اتجاه $\overrightarrow{و س}$

س = ٨ جتا ٠° + ٦$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

+ ٥ جتا ٦٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

= ٨ × ١ + ٦$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٥ × $\frac{١}{٢}$ + ٤$\sqrt{٣}$ × ٠

= $\frac{٣٩}{٢}$

، ص = ٨ جا ٠° + ٦$\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٥ جا ٦٠°

+ ٤$\sqrt{٣}$ جا ٩٠°

= ٨ × ٠ + ٦$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٥ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٤$\sqrt{٣}$ × ١

= $\frac{١٩\sqrt{٣}}{٢}$

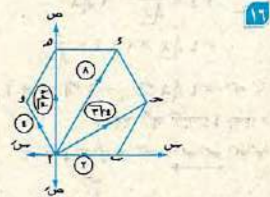
∴ $\overrightarrow{ح}$ = $\frac{٣٩}{٢}$ $\overrightarrow{س}$ + $\frac{١٩\sqrt{٣}}{٢}$ $\overrightarrow{ص}$

∴ ح = $\sqrt{(\frac{٣٩}{٢})^٢ + (\frac{١٩\sqrt{٣}}{٢})^٢}$ = $\sqrt{٦٥١}$ نيوتن

∴ ظا هـ = $\frac{١٩}{٣٩}$ $\sqrt{٣}$ ∴ هـ ≃ ٤٠° ٩′

أي أن المحصلة بين $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أد}$ وتصنع زاوية قياسها ٤٠° ٩′ مع $\overrightarrow{أب}$

١٦



بفرض $\overrightarrow{أب}$ في اتجاه $\overrightarrow{و س}$

∴ س = ٢ جتا ٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ٨ جتا ٦٠°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جتا ٩٠° + ٤ جتا ١٢٠°

= ٢ × ١ + ٤$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٨ × $\frac{١}{٢}$ + ٢$\sqrt{٣}$

× ٠ + ٤ × $\frac{-١}{٢}$ = ١٠

، ص = ٢ جا ٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٨ جا ٦٠°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠°

= ٢ × ٠ + ٤$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢$\sqrt{٣}$

× ١ + ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠$\sqrt{٣}$

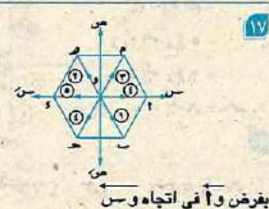
∴ $\overrightarrow{ح}$ = ١٠ $\overrightarrow{س}$ + ١٠$\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$

∴ ح = √((١٠)² + (١٠√٣)²) = ٢٠ ث.كجم

، ظا هـ = ١٠√٣ / ٢ = √٣ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة ٢٠ ث.كجم واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع أب→

١٧



بفرض و أ→ في اتجاه و س→

∴ س = ٤ جتا ٠° + ٣ جتا ٦٠° + ٢ جتا ١٢٠°

+ ٥ جتا ١٨٠° + ٤ جتا ٢٤٠° + جتا ٣٠٠°

= ٤ × ١ + ٣ × ١/٢ + ٢ × -١/٢

+ ٥ × -١ + ٤ × -١/٢ + ١/٢ = -٢

، ص = ٤ جا ٠° + ٣ جا ٦٠° + ٢ جا ١٢٠°

+ ٥ جا ١٨٠° + ٤ جا ٢٤٠° + جا ٣٠٠°

= ٤ × صفر + ٣ × √٣/٢ + ٢ × √٣/٢

+ ٥ × صفر + ٤ × -√٣/٢ - √٣/٢ = صفر

∴ ح→ = -٢ س→

∴ مقدار المحصلة ٢ ث.جم وتعمل في اتجاه و س′→

أي في اتجاه و ء→

١٨

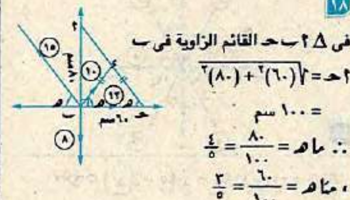
في Δ أ ب حـ القائم الزاوية في ب

أحـ = √((٦٠)² + (٨٠)²)

= ١٠٠ سم

∴ جا هـ = ٨٠/١٠٠ = ٤/٥

، جتا هـ = ٦٠/١٠٠ = ٣/٥



∴ س = ١٢ جتا ٠° + ١٠ جتا هـ

+ ١٥ جتا (١٨٠° - هـ) + ٨ جتا ٢٧٠°

= ١٢ × ١ + ١٠ × ٣/٥ + ١٥ × -٣/٥

+ ٨ × صفر = ٩

، ص = ١٢ جا ٠° + ١٠ جا هـ

+ ١٥ جا (١٨٠° - هـ) + ٨ جا ٢٧٠°

= ١٢ × صفر + ١٠ × ٤/٥ + ١٥ × ٤/٥

+ ٨ × -١ = ١٢

∴ ح→ = ٩ س→ + ١٢ ص→

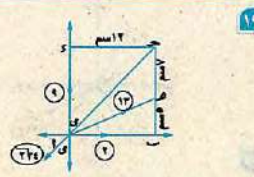
∴ ح = √((٩)² + (١٢)²) = ١٥ نيوتن

، ظا ى = ١٢/٩ = ٤/٣

، ∵ ظا ى = ظا هـ ، س > ٠ ، ص > ٠

∴ المحصلة تعمل في اتجاه ب ء→

١٩



∵ Δ أ هـ ب قائم الزاوية في ب

∴ أهـ = √((٥)² + (١٢)²) = ١٣ سم

∴ جا (∠ب أ هـ) = ٥/١٣ ، جتا (∠ب أ هـ) = ١٢/١٣

، ∵ أحـ قطر في المربع أ ب حـ ء

∴ ى = ٤٥°

∴ س = ٢ × جتا ٠° + ١٣ × جتا (∠ب أ هـ)

+ ٩ × جتا ٩٠° + ٤√٢ × جتا ٢٢٥°

= ٢ × ١ + ١٣ × ١٢/١٣ + ٩ × صفر

+ ٤√٢ × -١/√٢ = ١٠

، ص = ٤ × جا ٠° + ١٣ × جا (∠ب أ هـ)

+ ٩ × جا ٩٠° + ٤√٢ × جا ٢٢٥°

= ٤ × صفر + ١٣ × ٥/١٣ + ٩ × ١

+ ٤√٢ × -١/√٢ = ١٠

∴ ح→ = ١٠ س→ + ١٠ ص→

∴ ح = √((١٠)² + (١٠)²) = ١٠√٢ ث.جم

، ظا ل = ١٠/١٠ = ١

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ المحصلة تعمل في اتجاه أحـ→

٢٠

∵ أحـ قطر في المربع

∴ ق(∠حـ أ ء) = ٤٥°

، ∵ Δ أ ب هـ قائم الزاوية في ب

∴ أهـ = √((٦)² + (٣)²) = ٣√٥ سم

∴ جا ى = ٣/(٣√٥) = ١/√٥ ، جتا ى = ٦/(٣√٥) = ٢/√٥

، في Δ أ و ء القائم الزاوية في ء

أو = √(٣² + ٦²) = ٣√٥ سم

∴ جا ر = ٣/(٣√٥) = ١/√٥ ، جتا ر = ٦/(٣√٥) = ٢/√٥

∴ س = ٢ جتا ٠° + ١٢√٥ جتا ى

+ ٤√٥ جتا (٩٠° - ر) + ٤ جتا ٩٠°

+ ٦√٢ جتا ٢٢٥° = ٢ × ١

+ ١٢√٥ × ٢/√٥ + ٤√٥ × ١/√٥ + ٤ × صفر

+ ٦√٢ × -١/√٢ = ٢٤

، ص = ٢ جا ٠° + ١٢√٥ جا ى

+ ٤√٥ جا (٩٠° - ر) + ٤ جا ٩٠°

+ ٦√٢ جا ٢٢٥° = ٢ × ٠ + ١٢√٥ × ١/√٥

+ ٤√٥ × ٢/√٥ + ٤ × ١ + ٦√٢ × -١/√٢ = ١٨

∴ ح→ = ٢٤ س→ + ١٨ ص→

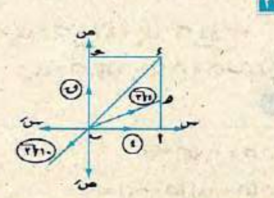
∴ ح = √((٢٤)² + (١٨)²) = ٣٠ ث.كجم

، ظا ل = ١٨/٢٤ = ٣/٤

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ل = ٣٦° ٥٢′ ١٢″

∴ المحصلة مقدارها ٣٠ ث.كجم وتصنع زاوية قياسها ٣٦° ٥٢′ ١٢″ مع أب→

٢١



∵ القوى متزنة ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ٤ جتا ٠° + ٤√٣ جتا (∠أ ب هـ) + ق جتا ٩٠°

+ ١٠√٢ جتا ٢٢٥° = ٠

∴ ٤ × ١ + ٤√٣ جتا (∠أ ب هـ) + ق × صفر

+ ١٠√٢ × -١/√٢ = ٠

∴ ٤ + ٤√٣ جتا (∠أ ب هـ) - ١٠ = ٠

∴ جتا (∠أ ب هـ) = ٦/(٤√٣) = √٣/٢

∴ ق(∠أ ب هـ) = ٣٠°

، ٤ جا ٠° + ٤√٣ جا ٣٠° + ق جا ٩٠°

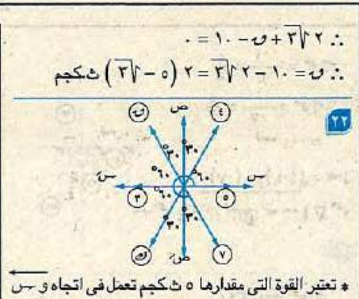
+ ١٠√٣ جا ٢٢٥° = ٠

∴ ٤ × ٠ + ٤√٣ × ١/٢ + ق × ١ + ١٠√٢ × -١/√٢ = ٠

∴ ٢√٣ + ق − ١٠ = ٠

∴ ق = ١٠ − ٢√٣ = ٢ (٥ − √٣) ث.كجم

٢٢



* تعتبر القوة التى مقدارها ٥ ث.كجم تعمل فى اتجاه و س→

، ∵ القوى متزنة ∴ س = ص = ٠

∴ س = ٥ حتا ٠° + ٤ حتا ٦٠° + ق حتا ١٢٠°

+ ٣ حتا ١٨٠° + ك حتا ٢٤٠° + ٧ حتا ٣٠٠° = ٠

∴ ٥ × ١ + ٤ × ١/٢ + ق × −١/٢ + ٣ × −١ + ك

× −١/٢ + ٧ × ١/٢ = ٠

∴ ق + ك = ١٥ (١)

، ص = ٥ حا ٠° + ٤ حا ٦٠° + ق حا ١٢٠°

+ ٣ حا ١٨٠° + ك حا ٢٤٠° + ٧ حا ٣٠٠° = ٠

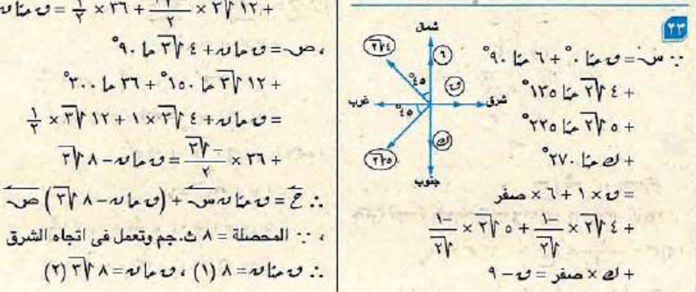
∴ ٥ × ٠ + ٤ × √٣/٢ + ق × √٣/٢ + ٣ × ٠

+ ك × −√٣/٢ + ٧ × −√٣/٢ = ٠

∴ ق − ك = ٢ (٢) بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ ق = ٩ ث.كجم ، ك = ٦ ث.كجم

٢٣



∵ س = ق حتا ٠° + ٦ حتا ٩٠°

+ ٤√٢ حتا ١٣٥°

+ ٥√٢ حتا ٢٢٥°

+ ك حتا ٢٧٠°

= ق × ١ + ٦ × صفر

+ ٤√٢ × −١/√٢ + ٥√٢ × −١/√٢

+ ك × صفر = ق − ٩

، ص = ق حا ٠° + ٦ حا ٩٠°

+ ٤√٢ حا ١٣٥° + ٥√٢ حا ٢٢٥°

+ ك حا ٢٧٠°

= ق × صفر + ٦ × ١ + ٤√٢ × ١/√٢

+ ٥√٢ × −١/√٢ + ك × −١ = ٥ − ك

∴ ح→ = (ق − ٩) س→ + (٥ − ك) ص→

، ∵ محصلة القوى = ٢ نيوتن فى اتجاه الشمال

∴ (ق − ٩) = صفر ∴ ق = ٩ نيوتن

، ٥ − ك = ٢ ∴ ك = ٣ نيوتن

٢٤

بفرض أن الزاوية القطبية للقوة ق قياسها هـ

∴ س = ق حتا هـ + ٤√٣ حتا ٩٠°

+ ١٢√٣ حتا ١٥٠° + ٣٦ حتا ٣٠٠°

= ق حتا هـ + ٤√٣ × صفر

+ ١٢√٣ × −√٣/٢ + ٣٦ × ١/٢ = ق حتا هـ

، ص = ق حا هـ + ٤√٣ حا ٩٠°

+ ١٢√٣ حا ١٥٠° + ٣٦ حا ٣٠٠°

= ق حا هـ + ٤√٣ × ١ + ١٢√٣ × ١/٢

+ ٣٦ × −√٣/٢ = ق حا هـ − ٨√٣

∴ ح→ = ق حتا هـ س→ + (ق حا هـ − ٨√٣) ص→

، ∵ المحصلة = ٨ ث.جم وتعمل فى اتجاه الشرق

∴ ق حتا هـ = ٨ (١) ، ق حا هـ = ٨√٣ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ ظا هـ = ٨√٣/٨ = √٣

، ∵ حتا هـ > ٠ ، حا هـ > ٠

∴ هـ تقع فى الربع الأول ∴ هـ = ٦٠°

وبالتعويض فى (١) : ∴ ق حتا ٦٠° = ٨

∴ ق = ١٦ ث.جم

٢٥

∵ س = ق حتا ٠° + ٨ حتا ٦٠°

+ ك حتا ٩٠°

+ ٥ حتا ١٨٠°

+ ٨√٣ حتا ٢٧٠°

= ق × ١ + ٨ × ١/٢ + ك × صفر

+ ٥ × −١ + ٨√٣ × صفر = ق − ١

، ص = ق حا ٠° + ٨ حا ٦٠° + ك حا ٩٠°

+ ٥ حا ١٨٠° + ٨√٣ حا ٢٧٠° = ق × صفر

+ ٨ × √٣/٢ + ك × ١ + ٥ × صفر

+ ٨√٣ × −١ = ك − ٤√٣

∴ ح→ = (ق − ١) س→ + (ك − ٤√٣) ص→ (١)

، ∵ ح = ٤ نيوتن فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق

∴ ح→ = ٤ حتا ٦٠° س→ + ٤ حا ٦٠° ص→

= ٢ س→ + ٢√٣ ص→ (٢)

من (١) ، (٢) : ∵ ق − ١ = ٢

∴ ق = ٣ نيوتن ، ك − ٤√٣ = ٢√٣

∴ ك = ٦√٣ نيوتن

٢٦

∵ س = ٢٥ حتا ى + ق حتا ٩٠° + ١٠√٢ حتا ١٣٥°

+ ٣٥ حتا ١٨٠° = ٢٥ × ٣/٥ + ق × ٠ + ١٠√٢

× −١/√٢ + ٣٥ × −١ = ١٥ − ١٠ − ٣٥ = −٣٠

، ص = ٢٥ حا ى + ق حا ٩٠° + ١٠√٢ حا ١٣٥°

+ ٣٥ حا ١٨٠° = ٢٥ × ٤/٥ + ق × ١ + ١٠√٢

× ١/√٢ = ٢٠ + ق + ١٠ = ٣٠ + ق

، ∵ ح² = س² + ص²

∴ (٥٠)² = (−٣٠)² + (٣٠ + ق)²

∴ ٢٥٠٠ = ٩٠٠ + ٩٠٠ + ٦٠ ق + ق²

∴ ٢٥٠٠ = ١٨٠٠ + ٦٠ ق + ق²

∴ ق² + ٦٠ ق − ٧٠٠ = ٠

∴ (ق + ٧٠) (ق − ١٠) = ٠

∴ ق = ١٠ ثقل جرام

٢٧

① ∵ س = ق حتا ٠° + ك حتا ١٢٠°

+ ٥√٣ حتا ٢١٠° + ٧√٣ حتا ٣٣٠° = صفر

∴ ق × ١ + ك × −١/٢ + ٥√٣ × −√٣/٢

+ ٧√٣ × √٣/٢ = صفر

∴ ق − ١/٢ ك + ٣ = ٠ (١)

، ص = ق حا ٠° + ك حا ١٢٠°

+ ٥√٣ حا ٢١٠° + ٧√٣ حا ٣٣٠° = صفر

∴ ق × ٠ + ك × √٣/٢ + ٥√٣ × −١/٢

+ ٧√٣ × −١/٢ = صفر

∴ √٣/٢ ك = ٦√٣ ∴ ك = ١٢ نيوتن

ومن (١) : ق = ٣ نيوتن.

(٢) ∵ س = ٦√٣ جتا ٠° + ق جتا ١٥٠° + ك جتا ٢١٠° = ٠

∴ ٦√٣ × ١ + ق × $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ك × $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = صفر

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ٦√٣

∴ ق + ك = ١٢ (١)

، ص = ٦√٣ جا ٠° + ق جا ١٥٠° + ك جا ٢١٠° = ٠

∴ ٦√٣ × ٠ + ق × $\frac{١}{٢}$ + ك × $-\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{١}{٢}$ ك = ٠

∴ ق − ك = ٠ (٢)

من (١)، (٢): ∴ ق = ٦ ، ك = ٦

(٣) ∵ س = ق جتا ٠° + ٤√٣ جتا ٣٠° + ٢√٣ جتا ٩٠° + ك جتا ١٢٠° + ١٢ جتا ٢٤٠° = ٠

∴ ق × ١ + ٤√٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢√٣ × ٠ + ك × $-\frac{١}{٢}$ + ١٢ × $-\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ ق − $\frac{١}{٢}$ ك = ٠ (١)

، ص = ق جا ٠° + ٤√٣ جا ٣٠° + ٢√٣ جا ٩٠° + ك جا ١٢٠° + ١٢ جا ٢٤٠° = ٠

∴ ق × ٠ + ٤√٣ × $\frac{١}{٢}$ + ٢√٣ × ١ + ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١٢ × $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ٢√٣

∴ ك = ٤ ومن (١): ∴ ق = ٢

٢٨

∵ س = ق جتا ٠° + ٣√٢ جتا ٤٥° + ٢√٣ جتا ١٥٠° + √٣ جتا ٢٧٠°

= ق × ١ + ٣√٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢√٣ × $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + √٣ × صفر = ق

، ص = ق جا ٠° + ٣√٢ جا ٤٥° + ٢√٣ جا ١٥٠° + √٣ جا ٢٧٠°

= ق × صفر + ٣√٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢√٣ × $\frac{١}{٢}$ + √٣ × −١ = ٣

∴ ح = ق س + ٣ ص

∴ (٣√٢)² = ق² + ٣² ∴ ق² = ٩

∴ ق = ٣ نيوتن ∴ ح = ٣ س + ٣ ص

، ظا هـ = $\frac{٣}{٣}$ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ الزاوية بين خط عمل المحصلة والقوة الأولى قياسها ٤٥°

٢٩

∵ س = ٤ جتا ٠° + ٢√٣ جتا ٣٠° + ق جتا ٦٠° + ٢√٣ جتا ٩٠° + ك جتا ١٢٠°

= ٤ × ١ + ٢√٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ق × $\frac{١}{٢}$ + ٢√٣ × صفر + ك × $-\frac{١}{٢}$

= ٧ + $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{١}{٢}$ ك

، ص = ٤ جا ٠° + ٢√٣ جا ٣٠° + ق جا ٦٠° + ٢√٣ جا ٩٠° + ك جا ١٢٠°

= ٤ × صفر + ٢√٣ × $\frac{١}{٢}$ + ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢√٣ × ١ + ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٣√٣ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك

∴ ح = (٧ + $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{١}{٢}$ ك) س + (٣√٣ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك) ص (١)

، ∵ المحصلة تساوي ٢٠ ث.كجم في اتجاه أء

∴ ح = ٢٠ جتا ٦٠° س + ٢٠ جا ٦٠° ص

= ١٠ س + ١٠√٣ ص (٢)

من (١)، (٢): ∴ ٧ + $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{١}{٢}$ ك = ١٠

∴ ق − ك = ٦ (٣)

، ٣√٣ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ١٠√٣

∴ ق + ك = ١٤ (٤)

، بجمع (٣)، (٤): ∴ ٢ ق = ٢٠

∴ ق = ١٠ ث.كجم ومنها ك = ٤ ث.كجم

٣٠

∵ هـ قياس زاوية حادة ، جا هـ = $\frac{٤}{٥}$

∴ جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ٤ ق جتا (٩٠° − هـ) + ٢ ك جتا (٩٠° + هـ) + ٢ ق جتا (١٨٠° + هـ) + ك جتا (٣٦٠° − هـ)

= ٤ ق جا هـ − ٢ ك جا هـ − ٢ ق جتا هـ + ك جتا هـ

= ٤ ق × $\frac{٤}{٥}$ − ٢ ك × $\frac{٤}{٥}$ − ٢ ق × $\frac{٣}{٥}$ + ك × $\frac{٣}{٥}$ = ٢ ق − ك

، ص = ٤ ق جا (٩٠° − هـ) + ٢ ك جا (٩٠° + هـ) + ٢ ق جا (١٨٠° + هـ) + ك جا (٣٦٠° − هـ)

= ٤ ق جتا هـ + ٢ ك جتا هـ − ٢ ق جا هـ − ك جا هـ = ٤ ق × $\frac{٣}{٥}$ + ٢ ك × $\frac{٣}{٥}$

− ٢ ق × $\frac{٤}{٥}$ − ك × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ ق + $\frac{٢}{٥}$ ك

∴ ح = (٢ ق − ك) س + ($\frac{٤}{٥}$ ق + $\frac{٢}{٥}$ ك) ص (١)

، ∵ ح = ٨√٢ جتا ١٣٥° س + ٨√٢ جا ١٣٥° ص

= −٨ س + ٨ ص (٢)

من (١)، (٢): ∴ ٢ ق − ك = −٨ (٣)

، $\frac{٤}{٥}$ ق + $\frac{٢}{٥}$ ك = ٨

أي ٢ ق + ك = ٢٠ (٤)

بجمع (٣)، (٤): ∴ ٤ ق = ١٢

∴ ق = ٣ نيوتن ومن (٣): ∴ ك = ١٤ نيوتن

٣١

∵ ح = (٥ + أ − ١٤) س + (٣ + ٦ + ب) ص

= (أ − ٩) س + (٩ + ب) ص (١)

، ∵ ع = (١٠√٢ ، ١٣٥°)

∴ ح = ١٠√٢ جتا ١٣٥° س + ١٠√٢ جا ١٣٥° ص

= −١٠ س + ١٠ ص (٢)

من (١)، (٢): ∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

، ٩ + ب = ١٠ ∴ ب = ١

إجابات تمارين 4

أولًا: أسئلة الاختيار من متعدد

(1) (ب) (2) (ب) (3) (ب) (4) (جـ) (5) (جـ)

(6) (جـ) (7) (ب) (8) (جـ) (9) (جـ) (10) (د)

(11) (جـ) (12) (أ) (13) (جـ) (14) (ب) (15) (ب)

(16) (أ) (17) (ب) (18) (أ) (19) (د) (20) (د)

(21) (د) (22) (د) (23) (ب) (24) (جـ) (25) (أ)

(26) (جـ) (27) (د) (28) (ب) (29) (أ) (30) (ب)

(31) (ب) (32) (د) (33) (أ) (34) (ب) (35) (جـ)

(36) (ب)

ثانيًا: الأسئلة المقالية

1

∵ القوى تمثل بأضلاع مثلث مأخوذة فى اتجاه دورى واحد

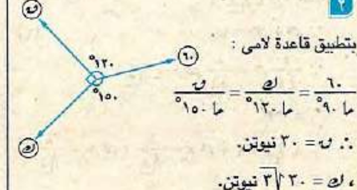
∴ القوى متزنة

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى :

$\therefore \frac{ق_1}{3} = \frac{ق_2}{4} = \frac{75}{5}$ ∴ $ق_1 = \frac{75 \times 3}{5} = 45$ نيوتن

، $ق_2 = \frac{75 \times 4}{5} = 60$ نيوتن

2



بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{60}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{ك}{\text{جا } 120^\circ} = \frac{ق}{\text{جا } 150^\circ}$

∴ $ق = 30$ نيوتن.

، $ك = 30\sqrt{3}$ نيوتن.

3

بتطبيق قاعدة لامى :

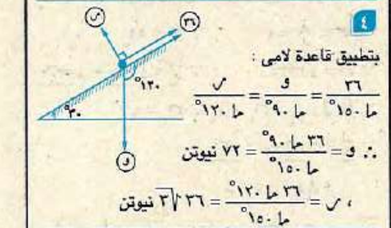
$\frac{ق}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{ر}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{12}{\text{جا } 120^\circ}$

$\therefore \frac{ق}{\frac{1}{2}} = \frac{ر}{1} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore ق = \frac{12 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$ ث.كجم

، $ر = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3}$ ث.كجم

4



بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{36}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{و}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{ر}{\text{جا } 120^\circ}$

$\therefore و = \frac{36 \text{ جا } 90^\circ}{\text{جا } 150^\circ} = 72$ نيوتن

، $ر = \frac{36 \text{ جا } 120^\circ}{\text{جا } 150^\circ} = 36\sqrt{3}$ نيوتن

5

∵ القوى الثلاثة متزنة

∴ محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1 ق_2}$

، $\overrightarrow{ق_2}$ تساوى فى المقدار $ق_1$

$\therefore (8)^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4)^2 + 2 \times 4\sqrt{3} \times 4 \text{ جتا } ى_1$

$\therefore 64 = 64 + 32\sqrt{3} \text{ جتا } ى_1$

∴ $\text{جتا } ى_1 = $ صفر ∴ $ى_1 = 90^\circ$

، محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تساوى فى المقدار $ق_2$

$\therefore (4\sqrt{3})^2 = (8)^2 + (4)^2 + 2 \times 8 \times 4 \text{ جتا } ى_2$

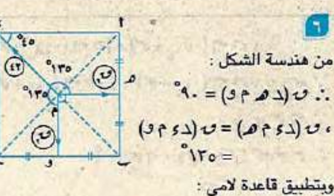
$\therefore 48 = 80 + 64 \text{ جتا } ى_2$

$\therefore \text{جتا } ى_2 = -\frac{1}{2}$ ∴ $ى_2 = 120^\circ$

$\therefore ى_3 = 360^\circ - (90^\circ + 120^\circ) = 150^\circ$

∴ قياسات الزوايا هى : 90° ، 120° ، 150°

6



من هندسة الشكل :

$\therefore ق(\angle هـ م و) = 90^\circ$

، $ق(\angle ء م هـ) = ق(\angle ء م و) = 135^\circ$

وبتطبيق قاعدة لامى :

$\therefore \frac{ق_1}{\text{جا } 135^\circ} = \frac{ق_2}{\text{جا } 135^\circ} = \frac{42}{\text{جا } 90^\circ}$

$\therefore \frac{ق_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{ق_2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{42}{1}$

$\therefore ق_1 = ق_2 = 42 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 21\sqrt{2}$ ث.جم

7

من هندسة الشكل

، وبتطبيق قاعدة لامى :

$\therefore \frac{ش_1}{\text{جا } 130^\circ} = \frac{ش_2}{\text{جا } 120^\circ} = \frac{10}{\text{جا } 110^\circ}$

$\therefore ش_1 = \frac{10 \times \text{جا } 130^\circ}{\text{جا } 110^\circ} \simeq 8.15$ نيوتن

، $ش_2 = \frac{10 \times \text{جا } 120^\circ}{\text{جا } 110^\circ} \simeq 9.216$ نيوتن

8

من هندسة الشكل :

$\overline{وء} \perp \overline{أب}$ ، ء منتصف $\overline{أب}$

$\therefore (وء)^2 = (20)^2 - (16)^2 = 144$

∴ $وء = 12$ سم

، ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ، برسم $\overline{ءهـ} \,//\, \overline{وب}$

∴ هـ منتصف $\overline{أو}$ ، $ءهـ = \frac{1}{2}$ وب

∴ $هـ و = 10$ سم ، $ءهـ = 10$ سم

∴ Δ ء و هـ هو مثلث القوى

$\therefore \frac{180}{ءو} = \frac{ش_1}{وهـ} = \frac{ش_2}{هـء}$ ∴ $\frac{180}{12} = \frac{ش_1}{10} = \frac{ش_2}{10}$

$\therefore ش_1 = ش_2 = \frac{180 \times 10}{12} = 150$ ث.كجم

9

بفرض أن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى = هـ

∴ $\text{جا هـ} = \frac{1}{2}$

∴ $هـ = 30^\circ$

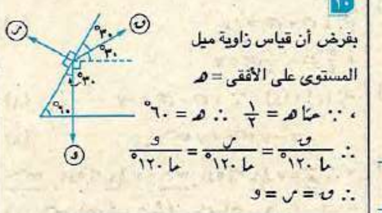
وبتطبيق قاعدة لامى :

$\therefore \frac{ق}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{ر}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{15}{\text{جا } 60^\circ}$

$\therefore \frac{ق}{\frac{1}{2}} = \frac{ر}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore ق = ر = \frac{15 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5\sqrt{3}$ ث.كجم

10



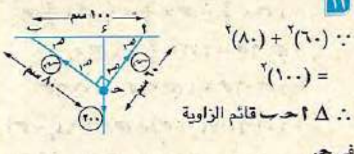
بفرض أن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى = هـ

، ∵ $\text{جتا هـ} = \frac{1}{2}$ ∴ $هـ = 60^\circ$

$\therefore \frac{ق}{\text{جا } 120^\circ} = \frac{ر}{\text{جا } 120^\circ} = \frac{و}{\text{جا } 120^\circ}$

∴ $ق = ر = و$

11



$\because (60)^2 + (80)^2 = (100)^2$

∴ Δ أحـب قائم الزاوية فى حـ

، من قاعدة لامى : $\therefore \frac{200}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{ش_1}{\text{جا هـ}_1} = \frac{ش_2}{\text{جا هـ}_2}$

، ∵ $\text{جا هـ}_1 = \frac{بحـ}{أب} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$

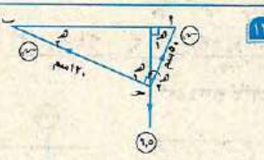
، $\text{جا هـ}_2 = \frac{أحـ}{أب} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

$\therefore \frac{200}{1} = \frac{ش}{\frac{4}{5}} = \frac{س}{\frac{3}{5}}$

$\therefore$ ش $= 200 \times \frac{4}{5} = 160$ ث.جم

، س $= 200 \times \frac{3}{5} = 120$ ث.جم

12



أب $= \sqrt{(50)^2 + (120)^2} = 130$ سم

، من قاعدة لامى : $\therefore \frac{6.5}{جا 90^\circ} = \frac{ش}{جا هـ_1} = \frac{س}{جا هـ_2}$

$\because$ جا هـ$_1 = \frac{ب ح}{أب} = \frac{120}{130} = \frac{12}{13}$

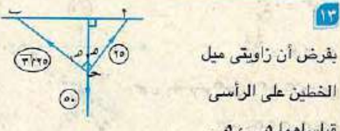
، جا هـ$_2 = \frac{أح}{أب} = \frac{50}{130} = \frac{5}{13}$

$\therefore \frac{6.5}{1} = \frac{ش}{\frac{12}{13}} = \frac{س}{\frac{5}{13}}$

$\therefore$ ش $= 6.5 \times \frac{12}{13} = 6$ نيوتن

، س $= 6.5 \times \frac{5}{13} = 2.5$ نيوتن

13



بفرض أن زاويتى ميل الخطين على الرأسى قياساهما هـ$_1$ ، هـ$_2$

ومن قاعدة لامى : $\therefore \frac{50}{جا 90^\circ} = \frac{25}{جا هـ_1} = \frac{25\sqrt{3}}{جا هـ_2}$

$\therefore$ جا هـ$_1 = \frac{25 \times جا 90^\circ}{50} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ هـ$_1 = 30^\circ$

، جا هـ$_2 = \frac{25\sqrt{3} \times جا 90^\circ}{50} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ هـ$_2 = 60^\circ$

$\therefore$ زاويتا ميل الخطين على الرأسى قياساهما 30° ، 60°

14

من هندسة الشكل وباستخدام قاعدة لامى :

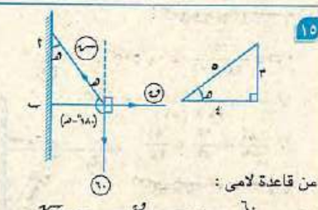
$\therefore \frac{200}{جا 120^\circ} = \frac{ق}{جا 150^\circ} = \frac{ش}{جا 90^\circ}$

$\therefore \frac{200}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{ق}{\frac{1}{2}} = \frac{ش}{1}$

$\therefore$ ق $= \frac{200 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{200\sqrt{3}}{3}$ ث.جم

، ش $= \frac{1 \times 200}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{400\sqrt{3}}{3}$ ث.جم

15



من قاعدة لامى :

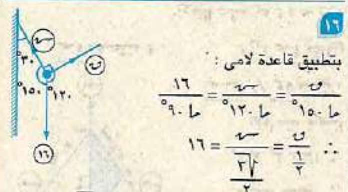
$\therefore \frac{60}{جا(90^\circ + هـ)} = \frac{ق}{جا(180^\circ - هـ)} = \frac{ش}{جا 90^\circ}$

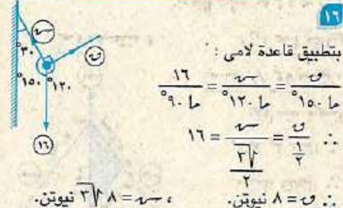
$\therefore \frac{60}{جتا هـ} = \frac{ق}{جا هـ} = \frac{ش}{1}$ $\therefore \frac{60}{\frac{4}{5}} = \frac{ق}{\frac{3}{5}} = \frac{ش}{1}$

$\therefore$ ق $= \frac{60 \times \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = 45$ ثقل جم

، ش $= \frac{60}{\frac{4}{5}} = 75$ ثقل جم

16





بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{ق}{جا 150^\circ} = \frac{ش}{جا 120^\circ} = \frac{16}{جا 90^\circ}$

$\therefore \frac{ق}{\frac{1}{2}} = \frac{ش}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 16$

$\therefore$ ق $= 8$ نيوتن. ، ش $= 8\sqrt{3}$ نيوتن.

17

من هندسة الشكل وباستخدام قاعدة لامى :

$\therefore \frac{600}{جا 90^\circ} = \frac{ق}{جا 150^\circ} = \frac{ش}{جا 120^\circ}$

$\therefore \frac{600}{1} = \frac{ق}{\frac{1}{2}} = \frac{ش}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore$ ق $= 300$ ث.جم ، ش $= 300\sqrt{3}$ ث.جم

18

① $\because$ أح $= \sqrt{(170)^2 - (80)^2}$

$= 150$ سم

، $\because \Delta$ أ ح ب هو مثلث القوى

$\therefore \frac{ق}{150} = \frac{ش}{170} = \frac{34}{80}$

$\therefore$ ق $= \frac{150 \times 34}{80} = 63.75$ ثقل جم

، ش $= \frac{170 \times 34}{80} = 72.25$ ثقل جم

② من قاعدة لامى :

$\therefore \frac{34}{جا 90^\circ} = \frac{ق}{جا هـ}$

$= \frac{ش}{جا(90^\circ + هـ)}$

$\therefore \frac{34}{1} = \frac{ق}{جا هـ} = \frac{ش}{جتا هـ}$

$\therefore \frac{34}{1} = \frac{ق}{\frac{150}{170}} = \frac{ش}{\frac{80}{170}}$

$\therefore$ ق $= 34 \times \frac{150}{170} = 30$ ثقل جم

، ش $= 34 \times \frac{80}{170} = 16$ ثقل جم

19

بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{ش}{جا(90^\circ + 2هـ)} = \frac{2\sqrt{3}}{جا(180^\circ - هـ)} = \frac{6}{جا(90^\circ - هـ)}$

$\therefore \frac{ش}{جتا 2هـ} = \frac{2\sqrt{3}}{جا هـ} = \frac{6}{جتا هـ}$

، $\because \frac{2\sqrt{3}}{جا هـ} = \frac{6}{جتا هـ}$

$\therefore \frac{جا هـ}{جتا هـ} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ ظا هـ $= \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ هـ $= 30^\circ$

$\therefore \frac{ش}{جتا 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{جا 30^\circ}$ $\therefore$ ش $= 2\sqrt{3}$ نيوتن

20

بفرض أن زاوية ميل المستوى على الأفقى قياسها هـ

$\frac{و}{جا 90^\circ} = \frac{\frac{1}{2}و}{جا(180^\circ - هـ)}$

$= \frac{ش}{جا(90^\circ + هـ)}$

$\therefore \frac{و}{1} = \frac{\frac{1}{2}و}{جا هـ} = \frac{ش}{جتا هـ}$ $\therefore$ جا هـ $= \frac{\frac{1}{2}و}{و} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ هـ $= 30^\circ$ $\therefore \frac{و}{1} = \frac{ش}{جتا 30^\circ}$

$\therefore$ ش $=$ و جتا $30^\circ =$ و $\times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و

21

نفرض أن الخيط يصنع زاوية قياسها هـ مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى

$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{جا 150^\circ} = \frac{6}{جا(90^\circ - هـ)}$

$= \frac{ش}{جا(120^\circ + هـ)}$

$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{جتا هـ} = \frac{ش}{جا(120^\circ + هـ)}$

$\therefore$ جتا هـ $= \frac{6 \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ هـ $= 30^\circ$

∴ قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع المستوى = ٣٠°

، ∵ ٢√٣ / (١/٢) = ش / جا(١٢٠° + ٣٠°)

∴ ش = (٢√٣ × جا ١٥٠°) / (١/٢) = (٢√٣ × ١/٢) / (١/٢)

= ٢√٣ ث.كجم

٢٢

بفرض أن زاوية ميل المستوى على الأفقى قياسها = هـ

∴ ظا هـ = ١/√٣

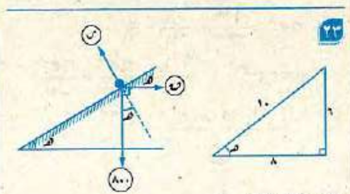
∴ هـ = ٣٠°

∴ ق/جا ١٥٠° = ر/جا ١٥٠° = ٣٠٠/جا ٦٠°

∴ ق/(١/٢) = ر/(١/٢) = ٣٠٠/(√٣/٢)

∴ ق = ر = (٣٠٠ × ١/٢)/(√٣/٢) = ١٠٠√٣ ث.جم

٢٣



بتطبيق قاعدة لامى :

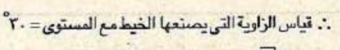
ق/جا(١٨٠° − هـ) = ر/جا ٩٠° = ٨٠٠/جا(٩٠° + هـ)

ق/جاهـ = ر/١ = ٨٠٠/جتاهـ

∴ ر = ٨٠٠ ÷ جتاهـ = ٨٠٠ × ١٠/٨ = ١٠٠٠ ث.جم

، ق = ٨٠٠ × جاهـ ÷ جتاهـ = ٨٠٠ × ٦/٨ = ٦٠٠ ث.جم

٢٤



∵ الحلقة ملساء

∴ الشد فى فرعى الخيط متساوى

، برسم ءو // سحـ

ويقطع أحـ فى و ∴ و منتصف أحـ

، Δ حـءو هو مثلث القوى

∴ ١٥٠/١٢ = ش/٧,٥ = ش/٧,٥

∴ ش = (١٥٠ × ٧,٥)/١٢ = ٩٣,٧٥ ث.جم

٢٥

(١) ∵ أب = √((١٣٠)² − (٥٠)²) = ١٢٠ سم

، من هندسة الشكل نجد أن :

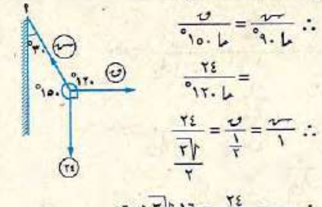
Δ أبحـ هو مثلث القوى

∴ ش/١٣٠ = ق/٥٠ = ٢٤/١٢٠

∴ ش = (٢٤ × ١٣٠)/١٢٠ = ٢٦ نيوتن

، ق = (٢٤ × ٥٠)/١٢٠ = ١٠ نيوتن

(٢) باستخدام قاعدة لامى :



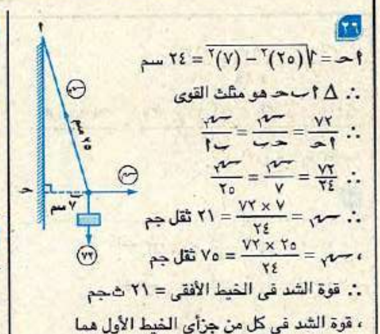
∴ ش/جا ٩٠° = ق/جا ١٥٠° = ٢٤/جا ١٢٠°

∴ ش/١ = ق/(١/٢) = ٢٤/(√٣/٢)

∴ ش = ٢٤/(√٣/٢) = ١٦√٣ نيوتن

، ق = (٢٤ × ١/٢)/(√٣/٢) = ٨√٣ نيوتن

٢٦



أحـ = √((٢٥)² − (٧)²) = ٢٤ سم

∴ Δ أبحـ هو مثلث القوى

∴ ٧٢/أحـ = ش/حـب = ش/أب

∴ ٧٢/٢٤ = ش/٧ = ش/٢٥

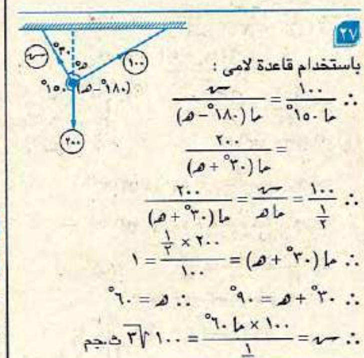
∴ ش = (٧٢ × ٧)/٢٤ = ٢١ ثقل جم

، ش = (٧٢ × ٢٥)/٢٤ = ٧٥ ثقل جم

∴ قوة الشد فى الخيط الأفقى = ٢١ ث.جم

، قوة الشد فى كل من جزأى الخيط الأول هما ٧٥ ، ٧٢ ث.جم

٢٧



باستخدام قاعدة لامى :

∴ ١٠٠/جا ١٥٠° = ش/جا(١٨٠° − هـ) = ٢٠٠/جا(٣٠° + هـ)

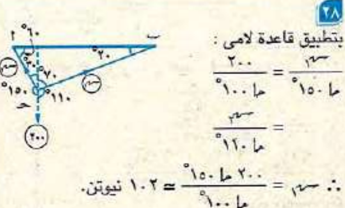
∴ ١٠٠/(١/٢) = ش/جاهـ = ٢٠٠/جا(٣٠° + هـ)

∴ جا(٣٠° + هـ) = (٢٠٠ × ١/٢)/١٠٠ = ١

∴ ٣٠° + هـ = ٩٠° ∴ هـ = ٦٠°

∴ ش = (١٠٠ × جا ٦٠°)/(١/٢) = ١٠٠√٣ ث.جم

٢٨



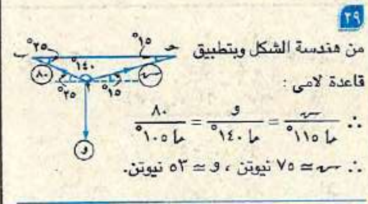
بتطبيق قاعدة لامى :

ش/جا ١٥٠° = ٢٠٠/جا ١٠٠° = ش/جا ١١٠°

∴ ش = (٢٠٠ جا ١٥٠°)/جا ١٠٠° ≃ ١٠٢ نيوتن.

، ش = (٢٠٠ جا ١١٠°)/جا ١٠٠° ≃ ١٩١ نيوتن.

٢٩

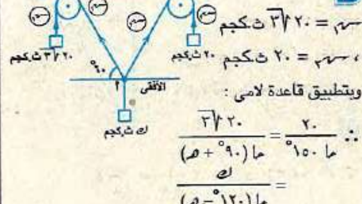


من هندسة الشكل وبتطبيق قاعدة لامى :

∴ ش/جا ١١٥° = و/جا ١٤٠° = ٨٠/جا ١٠٥°

∴ ش ≃ ٧٥ نيوتن ، و ≃ ٥٣ نيوتن.

٣٠



ش = ٢٠√٣ ث.كجم

، ش = ٢٠ ث.كجم

وبتطبيق قاعدة لامى :

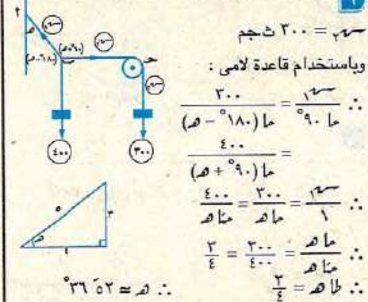
∴ ٢٠/جا ١٥٠° = ٢٠√٣/جا(٩٠° + هـ) = ك/جا(١٢٠° − هـ)

∴ جتا هـ = (٢٠√٣ × جا ١٥٠°)/٢٠ = √٣/٢

∴ هـ = ٣٠° ، ك = (٢٠ × جا ٩٠°)/جا ١٥٠° = ٤٠ ث.كجم

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١



ش = ٣٠٠ ث.جم

وباستخدام قاعدة لامى :

∴ ش/جا ٩٠° = ٣٠٠/جا(١٨٠° − هـ) = ٤٠٠/جا(٩٠° + هـ)

∴ ش/١ = ٣٠٠/جاهـ = ٤٠٠/جتاهـ

∴ جاهـ/جتاهـ = ٣٠٠/٤٠٠ = ٣/٤

∴ ظاهـ = ٣/٤ ∴ هـ ≃ ٣٦° ٥٢َ

∴ زاوية ميل أب على الرأسى قياسها ≃ ٣٦° ٥٢َ

∴ ش/١ = ٣٠٠/(٣/٥) ∴ ش = ٥٠٠ ث.جم

٢

∵ القوى التى مقاديرها $ش_1$ ، $ش_2$ ، ك المتلاقية فى نقطة حـ متزنة

وبتطبيق قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{ش_1}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{ش_2}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{ك}{\text{جا } ١٢٠^\circ}$$

$$\therefore \frac{ش_1}{١} = \frac{ش_2}{\frac{١}{٢}} = \frac{ك}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} \qquad (١)$$

، ∵ القوى التى مقاديرها $ش_2$ ، $ش_3$ ، ٢٠ المتلاقية فى نقطة ء متزنة ، وبتطبيق قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{٢٠}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{ش_2}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{ش_3}{\text{جا } ٩٠^\circ}$$

$$\therefore \frac{٢٠}{\frac{١}{٢}} = \frac{ش_2}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{ش_3}{١}$$

$$\therefore ش_2 = \frac{٢٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٢٠\sqrt{٣} \text{ ث.كجم}$$

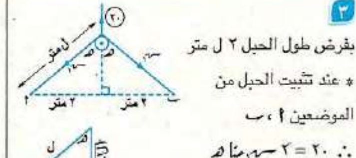
$$، ش_3 = \frac{٢٠ \times ١}{\frac{١}{٢}} = ٤٠ \text{ ث.كجم}$$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore \frac{ش_1}{١} = \frac{٢٠\sqrt{٣}}{\frac{١}{٢}} = \frac{ك}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

$$\therefore ش_1 = ٤٠\sqrt{٣} \text{ ث.كجم}$$

$$، ك = \frac{٢٠\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٦٠ \text{ ث.كجم}$$

٣



بفرض طول الحبل ٢ ل متر

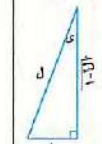
* عند تثبيت الحبل من الموضعين أ ، ب

$\therefore ٢٠ = ٢ ش_1 \text{ جتا } هـ$

$$\therefore ش_1 = \frac{١٠}{\text{جتا } هـ}$$

$$= ١٠ \times \frac{ل}{\sqrt{ل^2 - ٤}} \qquad (١)$$

* عند تثبيت الحبل من الموضعين حـ ، ء



$\therefore ٢٠ = ٢ ش_2 \text{ جتا } ى$

$$\therefore ش_2 = \frac{١٠}{\text{جتا } ى}$$

$$= ١٠ \times \frac{ل}{\sqrt{ل^2 - ١}} \qquad (٢)$$

من (١) ، (٢) : $\therefore ش_1 > ش_2$

أى أن : الشد فى الحبل فى حالة التعليق من أ ، ب أكبر منه فى حالة التعليق من حـ ، ء

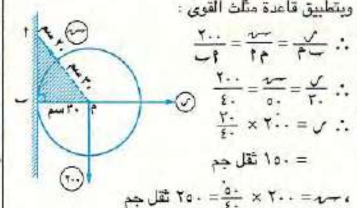
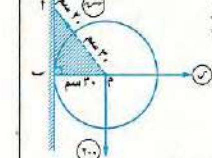
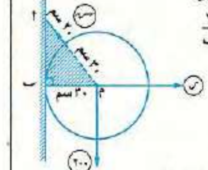
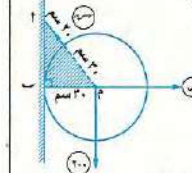
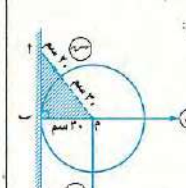
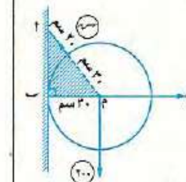
إجابات تمارين 5

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ) ⑤ (ب)
⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (د)
⑨ أولًا : (د) ثانيًا : (أ) ⑩ (ب) ⑪ (ب)
⑫ (جـ) ⑬ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

Δ م أ ب مثلث القوى

حيث م أ = ٣٠ + ٢٠ = ٥٠ سم ، ب م = ٣٠ سم

∴ أ ب = ٤٠ سم (فيثاغورس)

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى :

$$\therefore \frac{ر}{ب م} = \frac{ش}{أ م} = \frac{٢٠٠}{أ ب}$$

$$\therefore \frac{ر}{٣٠} = \frac{ش}{٥٠} = \frac{٢٠٠}{٤٠}$$

$$\therefore ر = ٢٠٠ \times \frac{٣٠}{٤٠}$$

= ١٥٠ ثقل جم

$$، ش = ٢٠٠ \times \frac{٥٠}{٤٠} = ٢٥٠ \text{ ثقل جم}$$

٢

∵ الحائط أملس

∴ $\overleftarrow{ر} \perp$ الحائط

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overleftarrow{ش}$ يمر بالنقطة م

بتطبيق قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{ش}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{ر}{\text{جا } ١٥٠^\circ}$$

∴ ش = ٢٠ ثقل جرام ، ر = ١٠ ثقل جرام

٣

∵ الحائط أملس ∴ $\overleftarrow{ر} \perp$ الحائط

، ∵ مجموعة القوى متزنة ∴ $\overleftarrow{ش}$ يمر بالنقطة م

∴ Δ أ ب م هو مثلث القوى

حيث أ م = ٢ نق

، م ب = نق ، أ ب = $\sqrt{٣}$ نق

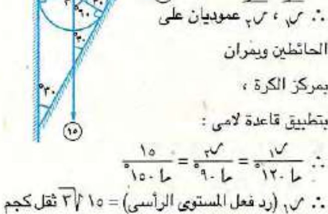
وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

$$\therefore \frac{ش}{٢ \text{ نق}} = \frac{ر}{\text{نق}} = \frac{١٥}{\sqrt{٣} \text{ نق}}$$

∴ ش = ١٠$\sqrt{٣}$ نيوتن ، ر = ٥$\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ الضغط على الحائط = ٥$\sqrt{٣}$ نيوتن

٤



∵ الحائطين أملسان

∴ $\overleftarrow{ر_1}$ ، $\overleftarrow{ر_2}$ عموديان على الحائطين ويمران بمركز الكرة ،

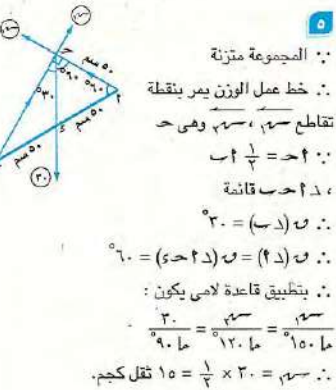
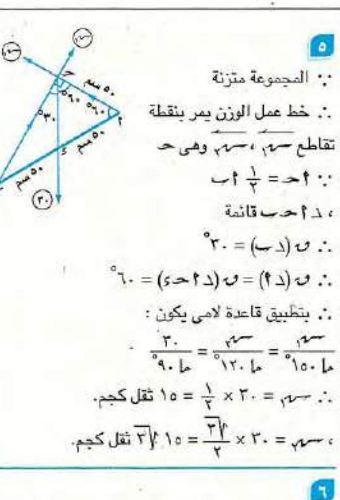
بتطبيق قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{ر_1}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{ر_2}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{١٥}{\text{جا } ١٥٠^\circ}$$

∴ $ر_1$ (رد فعل المستوى الرأسى) = ١٥$\sqrt{٣}$ ثقل كجم

، $ر_2$ (رد فعل المستوى المائل) = ٣٠ ثقل كجم

٥

∵ المجموعة متزنة

∴ خط عمل الوزن يمر بنقطة تقاطع $\overleftarrow{ش_1}$ ، $\overleftarrow{ش_2}$ وهى حـ

∵ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب

، ∠ أ حـ ب قائمة

∴ ق (∠ ب) = ٣٠°

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ أ حـ ء) = ٦٠°

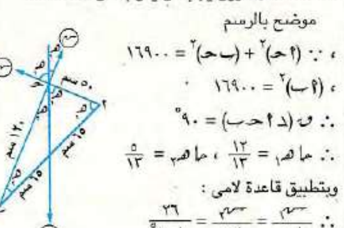
∴ بتطبيق قاعدة لامى يكون :

$$\frac{ش_1}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{ش_2}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{٣٠}{\text{جا } ٩٠^\circ}$$

∴ $ش_1 = ٣٠ \times \frac{١}{٢} = ١٥$ ثقل كجم.

، $ش_2 = ٣٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٥\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

٦



∵ الشدين فى الخيطين يتقاطعان عند نقطة التعليق

∴ خط عمل الوزن يجب أن يمر بنفس النقطة كما موضح بالرسم

، ∵ $(أ حـ)^2 + (ب حـ)^2 = ١٦٩٠٠$

، $(أ ب)^2 = ١٦٩٠٠$

∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠°

∴ $\text{جا } هـ_1 = \frac{١٢}{١٣}$ ، $\text{جا } هـ_2 = \frac{٥}{١٣}$

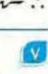
وبتطبيق قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{ش_1}{\text{جا } هـ_1} = \frac{ش_2}{\text{جا } هـ_2} = \frac{٢٦}{\text{جا } ٩٠^\circ}$$

$$\therefore \frac{ش_1}{\frac{١٢}{١٣}} = \frac{ش_2}{\frac{٥}{١٣}} = ٢٦$$

∴ $ش_1$ = ٢٤ نيوتن ، $ش_2$ = ١٠ نيوتن

٧



∵ مجموعة القوى متزنة ∴ $\overleftarrow{ر}$ يمر بالنقطة هـ

∵ ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ء هـ} \parallel \overline{أ حـ}$

∴ هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

، ب جـ = ٦٠ $\sqrt{٢}$ سم (فيثاغورس)

، Δ أ هـ جـ

مثلث القوى حيث

أ هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٣٠ $\sqrt{٢}$ سم

، هـ جـ = ٣٠ $\sqrt{٢}$ سم

، أ جـ = ٦٠ سم

$\therefore \frac{\text{ر}}{٣٠\sqrt{٢}} = \frac{\text{ش}}{٣٠\sqrt{٢}} = \frac{٤٠}{٦٠}$

$\therefore$ ر = ش = ٢٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن

٨

$\because$ مجموعة القوى متزنة

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ر}}$ يمر بالنقطة هـ

$\because$ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{أجـ}}$

$\therefore$ هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أهـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ أ هـ = ٤٠ سم (فيثاغورث)

، هـ جـ = ٤٠ $\sqrt{٣}$ سم ، أ جـ = ٨٠ سم

Δ أ هـ جـ هو مثلث القوى

$\therefore \frac{\text{ر}}{٤٠} = \frac{\text{ش}}{٤٠\sqrt{٣}} = \frac{٢٤}{٨٠}$

$\therefore$ ر = ٤٠ × $\frac{٢٤}{٨٠}$ = ١٢ ثقل كجم.

، ش = ٤٠ $\sqrt{٣}$ × $\frac{٢٤}{٨٠}$ = ١٢ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

٩

$\because$ القضيب مماس للكرة

، رد الفعل عمودى على القضيب

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ر}_١}$ ، $\overleftarrow{\text{ر}_٢}$ يمران بمركز الكرة

وبتطبيق قاعدة لامى :

$\therefore \frac{\text{ر}_١}{\text{جا }١٥٠^\circ} = \frac{\text{ر}_٢}{\text{جا }١٥٠^\circ} = \frac{٦٠}{\text{جا }٦٠^\circ}$

$\therefore$ ر$_١$ = ر$_٢$ = ٢٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

$\therefore$ ض$_١$ = ض$_٢$ = ٢٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

١٠

$\because$ Δ م أ ب هو مثلث القوى

$\therefore \frac{٥٠}{\text{م أ}} = \frac{٢٥}{\text{ب م}} = \frac{\text{و}}{\text{أ ب}}$

$\therefore \frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{٥٠}{٢٥} = ٢$

$\therefore$ م أ = ٢ × ١٢ = ٢٤ سم

$\therefore$ طول الخيط جـ أ = ٢٤ − ١٢ = ١٢ سم

، من Δ م أ ب القائم الزاوية فى ب

يكون أ ب = ١٢ $\sqrt{٣}$ سم.

$\therefore \frac{٢٥}{١٢} = \frac{\text{و}}{١٢\sqrt{٣}}$ $\therefore$ و = ٢٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

١١

$\because$ مجموعة القوى متزنة

$\therefore$ خط عمل الوزن يمر بنقطة

تقاطع $\overleftarrow{\text{ش}_١}$ ، $\overleftarrow{\text{ش}_٢}$ وهى جـ

$\because$ الحبلين متعامدان

$\therefore$ Δ أ ب جـ قائم الزاوية

$\therefore$ طول الحبل الآخر = ٦٤ سم

$\therefore$ جا هـ$_١$ = $\frac{٤٨}{٨٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، جا هـ$_٢$ = $\frac{٦٤}{٨٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

وبتطبيق قاعدة لامى : $\therefore \frac{\text{ش}_١}{\text{جا هـ}_١} = \frac{\text{ش}_٢}{\text{جا هـ}_٢} = \frac{١٢}{\text{جا }٩٠^\circ}$

$\therefore \frac{\text{ش}_١}{\frac{٣}{٥}} = \frac{\text{ش}_٢}{\frac{٤}{٥}} = ١٢$ $\therefore$ ش$_١$ = ٧,٢ نيوتن

، ش$_٢$ = ٩,٦ نيوتن

١٢

رد فعل الحائط الأملس

يكون عموديًا على

الحائط (ر$_١$)

، وزن السلم يؤثر

رأسيًا لأسفل وتلاقيا فى نقطة (ء)

$\therefore$ رد فعل الأرض لابد وأن يمر بالنقطة (ء)

ء ن = أ هـ = ٣ متر ، ب ن = ١,٢٥ متر

، من Δ ء ن ب القائم الزاوية فى ن

يكون ب ء = ٣,٢٥ مترًا (فيثاغورس)

، $\because$ Δ ن ب ء هو مثلث القوى وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

$\therefore \frac{\text{ر}_١}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ر}_٢}{\text{ب ء}} = \frac{٣٦}{\text{ء ن}}$

$\therefore \frac{\text{ر}_١}{١,٢٥} = \frac{\text{ر}_٢}{٣,٢٥} = \frac{٣٦}{٣}$

$\therefore$ ر$_١$ = ١٥ ثقل كجم ، ر$_٢$ = ٣٩ ثقل كجم

١٣

$\because$ مجموعة القوى متزنة

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ر}}$ يمر بنقطة هـ

ب جـ = ١٠٠ سم (فيثاغورس)

$\frac{\text{ب ء}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{جـ أ}}$

$\therefore \frac{٢}{٣} = \frac{\text{ب هـ}}{١٠٠} = \frac{\text{هـ ء}}{٨٠}$

$\therefore$ ب هـ = $\frac{٢٠٠}{٣}$ سم ، هـ ء = $\frac{١٦٠}{٣}$ سم

$\therefore$ هـ جـ = $\frac{١٠٠}{٣}$ سم

من Δ أ ء هـ : أ هـ = $\frac{٢٠\sqrt{٧٣}}{٣}$ سم (فيثاغورس)

$\therefore$ Δ أ هـ جـ هو مثلث القوى

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى :

$\therefore \frac{\text{ر}}{\frac{٢٠\sqrt{٧٣}}{٣}} = \frac{\text{ش}}{\frac{١٠٠}{٣}} = \frac{١٦}{٨٠}$

$\therefore$ ر = $\frac{٤}{٣}$ $\sqrt{٧٣}$ ثقل كجم

، ش = $\frac{٢٠}{٣}$ = ٦$\frac{٢}{٣}$ ثقل كجم

١٤

$\because$ القضيب متزن تحت

تأثير ٣ قوى متلاقية

فى النقطة ن

وباستخدام قاعدة لامى ينتج أن :

$\frac{٨}{\text{جا }٩٠^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{جا }١٥٠^\circ} = \frac{\text{ر}}{\text{جا }١٢٠^\circ}$

$\therefore \frac{٨}{١} = \frac{\text{ش}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ر}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

$\therefore$ ش = ٤ ثقل كجم ، ر = ٤ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم

١٥

$\because$ مجموعة القوى متزنة

، الوزن ($\overleftarrow{\text{و}}$)

، الشد ($\overleftarrow{\text{ش}}$) تلاقيا فى (ن)

$\therefore$ رد فعل المفصل لابد

وأن يمر بالنقطة (ن)

، $\because$ $\overline{\text{ء ن}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

$\therefore$ ن منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ Δ أ ن جـ هو مثلث القوى حيث

ن جـ = ٤٠ سم ، جـ أ = ١٠٠ سم

، $\because$ (أ جـ)^٢ = ١٠٠٠٠ ، (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ١٠٠٠٠

$\therefore$ ق(ب$\angle$) = ٩٠$^\circ$ $\therefore$ Δ ن ب أ قائم الزاوية

$\therefore$ أ ن = $\sqrt{(٤٠)^٢ + (٦٠)^٢}$ = ٢٠ $\sqrt{١٣}$ سم

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى :

$\therefore \frac{\text{ر}}{٢٠\sqrt{١٣}} = \frac{\text{ش}}{٤٠} = \frac{\text{و}}{١٠٠}$

$\therefore$ ش = $\frac{٢}{٥}$ و ثقل كجم ، ر = $\frac{\sqrt{١٣}}{٥}$ و ثقل كجم

ونفرض أن ل هى زاوية ميل رد الفعل على القضيب

$\therefore$ فى Δ ن ب أ القائم الزاوية فى ب يكون

ظا ل = $\frac{٤٠}{٦٠}$ = $\frac{٢}{٣}$ $\therefore$ ق($\angle$ ل) ≃ ٣٣ ٤١ َ ٣٣$^\circ$

١٦

في Δ أ ء حـ :

أ ء = √((٥٠)² − (٣٠)²)

= ٤٠ سم

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ر⃗ يمر بنقطة ن

ΔΔ حـ أ ء ، حـ م ن متشابهان لتساوى قياسات زواياهما

∴ حـ أ / حـ م = أ ء / م ن = حـ ء / حـ ن   ∴ ٢٠ / ١٥ = ٤٠ / م ن = ٥٠ / حـ ن

∴ م ن = ٣٠ سم ، حـ ن = ٢٥ سم

∴ ء ن = ٥٠ + ٢٥ = ٧٥ سم

من Δ أ م ن يكون أ ن = ٥ √٩٧ سم (فيثاغورس)

، ∵ Δ أ ن ء هو مثلث القوى

∴ ش / ٧٥ = ر / (٥ √٩٧) = و / ٤٠

∴ ش = ١٥/٨ و ثقل كجم ، ر = (√٩٧ / ٨) و ثقل كجم

١٧

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ر⃗ يمر بنقطة هـ

، بفرض أ حـ = ٢ ل

∴ ب حـ = ٢ ل

∴ هـ حـ = ل ، أ هـ = √٥ ل (فيثاغورس)

، ∵ Δ أ هـ حـ هو مثلث القوى

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ ٤ / ٢ل = ر / √٥ ل = ق / ل

∴ ق = ٢ ث.كجم ، ر = ٢ √٥ ث.كجم

١٨

بفرض وزن الساق ٢ و

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ر⃗ يمر بنقطة ن

∴ Δ أ ن حـ هو مثلث القوى

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ ق / ل = ٢ و / أ حـ = ر / أ ن   ∴ أ حـ = ٢ ل

، ∵ هـ منتصف أب ، هـ ن // أ حـ

∴ ن منتصف ب حـ   ∴ ب حـ = ٢ ل

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ٤٥°

∴ الساق تميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥°

، من Δ أ ن حـ : أ ن = √٥ ل (فيثاغورس)

∴ ق / ل = ر / √٥ ل   ∴ ر = √٥ و

∴ رد الفعل = (√٥ / ٢) وزن الساق

١٩

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ خط عمل الوزن يمر

بنقطة تلاقى ردى الفعل حـ

، ∵ الزاوية بين

المستويين قائمة

وكلاً من ردى الفعل عمودى

على المستوى الخارج منه

∴ أ ء ب حـ مستطيل   ∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠°

، بتطبيق قاعدة لامى :

∴ ٤ / حا ٩٠° = ر١ / حا ١٢٠° = ر٢ / حا ١٥٠°

∴ ر١ = ٢ √٣ نيوتن ، ر٢ = ٢ نيوتن

∴ ض١ = ٢ √٣ نيوتن ، ض٢ = ٢ نيوتن

، ∵ هـ أ = هـ ء (من خواص المستطيل)

، ق (∠ أ ء هـ) = ٦٠°

∴ Δ أ هـ ء متساوى الأضلاع

∴ ق (∠ هـ أ ء) = ٦٠°

∴ ق (∠ هـ أ ن) = ٣٠°

∴ القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

٢٠

ر⃗١ عمودى على ب حـ

، ر⃗٢ عمودى على حـ أ وتلاقيا فى م الذى يؤثر عنده

وزن الكرة (و⃗)

وبتطبيق قاعدة لامى ينتج أن :

ر١ / حا (١٨٠° − هـ) = ر٢ / حا ٩٠° = و / حا (٩٠° + هـ)

∴ ر١ / حا هـ = ر٢ = و / حتا هـ   ∴ ر١ / (٤/٥) = ر٢ = و / (٣/٥)

∴ ر١ = ٤/٣ و ثقل كجم ، ر٢ = ٥/٣ و ثقل كجم

∴ الضغط على الحائط = ٤/٣ و ثقل كجم

، الضغط على المستوى المائل = ٥/٣ و ثقل كجم

٢١

∵ مجموعة القوى متزنة

، ر⃗١ ، ر⃗٢ يتلاقيان في نقطة (ن)

∴ وزن القضيب يمر بالنقطة (ن)

، ∵ ن م // أ حـ

∴ ق (∠ ن م ب) = ق (∠ حـ) = ٦٠°

∴ فى Δ ن م ب : ق (∠ ب) = ٩٠°

، ق (∠ م) = ٦٠°   ∴ ق (∠ م ن ب) = ٣٠°

وبتطبيق قاعدة لامى ينتج أن :

ر١ / حا ١٥٠° = ر٢ / حا ٩٠° = ٢٠ / حا ١٢٠°

∴ ر١ / (١/٢) = ر٢ / ١ = ٢٠ / (√٣ / ٢)

∴ ر١ = (٢٠ √٣ / ٣) ثقل كجم ، ر٢ = (٤٠ √٣ / ٣) ثقل كجم

ويرسم ب ك ⊥ أ حـ   ∴ ب ع ⊥ ن م

ويفرض أن ب ع = ل   ∴ ب ن = ٢ ل

، ن ع = √٣ ل   ∴ أ ك = √٣ ل

، ∴ ب ك = ٢ ل

∴ طا (∠ ب أ ك) = طا هـ = ب ك / أ ك = ٢ل / √٣ ل = ٢ / √٣

∴ ق (∠ هـ) ≃ ٦ ٤٩°

٢٢

∵ ق (∠ أ حـ ب) = ق (∠ ء أ حـ)

= ق (∠ حـ ب ء) = ٩٠°

∴ الشكل أ حـ ب ء مستطيل

القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى

، ء هى نقطة تلاقى القوى

، بفرض قياس زاوية ميل المستوى الذى يستند عليه

الطرف أ على الأفقى هى هـ١ ، الذى يستند عليه

الطرف ب هى هـ٢

وباستخدام قاعدة لامى :

∴ ر / حا (٩٠° + هـ١) = ٤ / حا (٩٠° + هـ٢) = ٨ / حا ٩٠°

∴ ر / حتا هـ١ = ٤ / حتا هـ٢ = ٨   ∴ حتا هـ٢ = ١/٢

∴ ق (∠ هـ٢) = ٦٠°   ∴ ق (∠ هـ١) = ٣٠°

∴ ر = ٨ حتا ٣٠° = ٤ √٣ نيوتن

∴ الضغط على المستوى عند أ = ٤ √٣ نيوتن

٢٣

∵ المستوى المائل أملس

∴ رد فعل المستوى عند أ

يكون عموديًا على المستوى

لذلك فهو يمر بمركز الكرة (م)

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ الشد فى الخيط يمر بالنقطة (م)

فى △ م أ ب : ∵ ق(∠أ) = ٩٠° ، أ م = $\frac{1}{2}$ ب م

∴ هـ = ٣٠°

∴ ق(∠م ب أ) = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

∴ الخيط م ب يكون أفقيًا وبتطبيق قاعدة لامى ينتج أن :

$$\frac{\text{ر}}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{١٢\sqrt{٣}}{\text{جا } ١٢٠^\circ}$$

∴ $\frac{\text{ر}}{١} = \frac{\text{ش}}{\frac{1}{2}} = \frac{١٢\sqrt{٣}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ ∴ ر = ٢ ش = ٢٤

∴ الشد فى الخيط (ش) = ١٢ ثقل كجم.

، رد فعل المستوى (ر) = ٢٤ ثقل كجم.

٢٤

بفرض وزن القضيب (٢ و) ووزن الثقل (و)

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ر يمر بنقطة تلاقى وزن القضيب والشد فى الخيط وهى ء

، ∵ ن منتصف أ ب ، ن ء // أ حـ

∴ ء منتصف ب حـ

، ∵ أ ب = أ حـ ∴ أ ء ⊥ ب حـ

وبتطبيق قاعدة لامى :

$$\frac{\text{ر}}{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{ى})} = \frac{\text{٢ و}}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا}(٩٠^\circ + \text{ى})}$$

∴ ٢ و = $\frac{\text{و}}{\text{جتا ى}}$ ∴ جتا ى = $\frac{1}{2}$ ∴ ى = ٦٠°

∴ ق(∠ب حـ أ) = ٦٠° ، ∵ أ ب = أ حـ

∴ △ أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ب أ حـ) = ٦٠° ∴ ق(∠ب أ هـ) = ٣٠°

∴ زاوية ميل القضيب على الأفقى قياسها ٣٠°

٢٥

∵ الحائط أملس

∴ ر عمودى على الحائط

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ خط عمل الشد يمر بنقطة تلاقى رد الفعل والوزن وهى (و)

من △ أ و ن القائم الزاوية فى و

و ن = $\frac{1}{2}$ أ ن = ١٠ سم

∴ ∠ و ن أ خارجة عن المثلث المتساوى الساقين

و ن حـ حيث و ن = ن حـ = ١٠ سم

∴ ق(∠حـ و ن) = ٣٠°

وبتطبيق قاعدة لامى : ∴ $\frac{\text{ر}}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{١٢}{\text{جا } ١٢٠^\circ}$

∴ ر = ٤√٣ نيوتن ، ش = ٨√٣ نيوتن

٢٦

∵ أ حـ = أ ء = ٤ متر

∴ ق(∠أ حـ ء) = ٤٥°

∴ حـ ء = ٤√٢ متر

من △ م حـ ن : م ن = ١ متر ، ن حـ = √٢ متر

∴ ء ن = ٤√٢ − √٢ = ٣√٢ متر

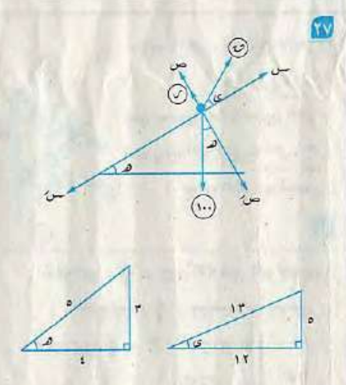
، من △ أ م ن : أ ن = √١٠ متر (فيثاغورس)

وحيث إن △ أ ن ء هو مثلث القوى

∴ $\frac{\text{ر}}{\sqrt{١٠}} = \frac{\text{ش}}{٣\sqrt{٢}} = \frac{٨}{٤}$

∴ ر = ٢√١٠ ثقل كجم ، ش = ٦√٢ ثقل كجم

٢٧



∵ الجسم متزن ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ق جتا ى + ر جتا ٩٠° + ١٠٠ جتا (٢٧٠° − هـ) = ٠

∴ ق × $\frac{١٢}{١٣}$ + ر × ٠ + ١٠٠ × (− جا هـ) = ٠

∴ $\frac{١٢}{١٣}$ ق − ١٠٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٠

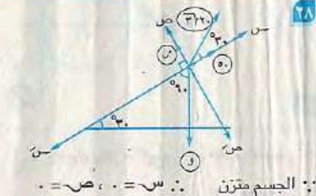
∴ ق = ٦٥ نيوتن

، ق جا ى + ر جا ٩٠° + ١٠٠ جا (٢٧٠° − هـ) = ٠

∴ ٦٥ × $\frac{٥}{١٣}$ + ر × ١ + ١٠٠ × (− جتا هـ) = ٠

∴ ٢٥ + ر − ١٠٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٠ ∴ ر = ٥٥ نيوتن

٢٨



∵ الجسم متزن ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ٥٠ جتا ٠° + ٢٠√٣ جتا ٣٠° + ر جتا ٩٠° + و جتا ٢٤٠° = ٠

∴ ٥٠ × ١ + ٢٠√٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ر × صفر − و × $\frac{1}{2}$ = ٠

∴ ٥٠ + ٣٠ − $\frac{1}{2}$ و = ٠ ∴ و = ١٦٠ نيوتن

، ٥٠ جا ٠° + ٢٠√٣ جا ٣٠° + ر جا ٩٠° + و جا ٢٤٠° = ٠

∴ ٥٠ × صفر + ٢٠√٣ × $\frac{1}{2}$ + ر × ١ − ١٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠

∴ ١٠√٣ + ر − ٨٠√٣ = ٠ ∴ ر = ٧٠√٣ نيوتن

٢٩

△ أ ب حـ فيه :

ق(∠ب) = ٩٠° ، أ حـ + ب حـ = ٤٠

∴ أ حـ = ٤٠ − ب حـ

، ∵ (أ حـ)² = (أ ب)² + (ب حـ)²

∴ (٤٠ − ب حـ)² = (٢٠)² + (ب حـ)²

∴ ١٦٠٠ − ٨٠ ب حـ + (ب حـ)² = ٤٠٠ + (ب حـ)²

∴ ٨٠ ب حـ = ١٢٠٠

∴ ب حـ = ١٥ سم ، أ حـ = ٢٥ سم

، ∵ الحلقة ملساء

∴ الشد فى حـ أ = الشد فى حـ ب = ش

، ∵ الحلقة متزنة ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ش جتا (٩٠° − هـ) + ش جتا ٩٠° + ق جتا ١٨٠° + ٤٠٠ جتا ٢٧٠° = ٠

∴ ش جا هـ + ش × ٠ + ق × (−١) + ٤٠٠ × ٠ = ٠

∴ ش × $\frac{٢٠}{٢٥}$ − ق = ٠

∴ ٤ ش − ٥ ق = ٠ (١)

، ش جا (٩٠° − هـ) + ش جا ٩٠° + ق جا ١٨٠° + ٤٠٠ جا ٢٧٠° = ٠

ش جتا هـ + ش × ١ + ق × ٠ + ٤٠٠ × (−١) = ٠

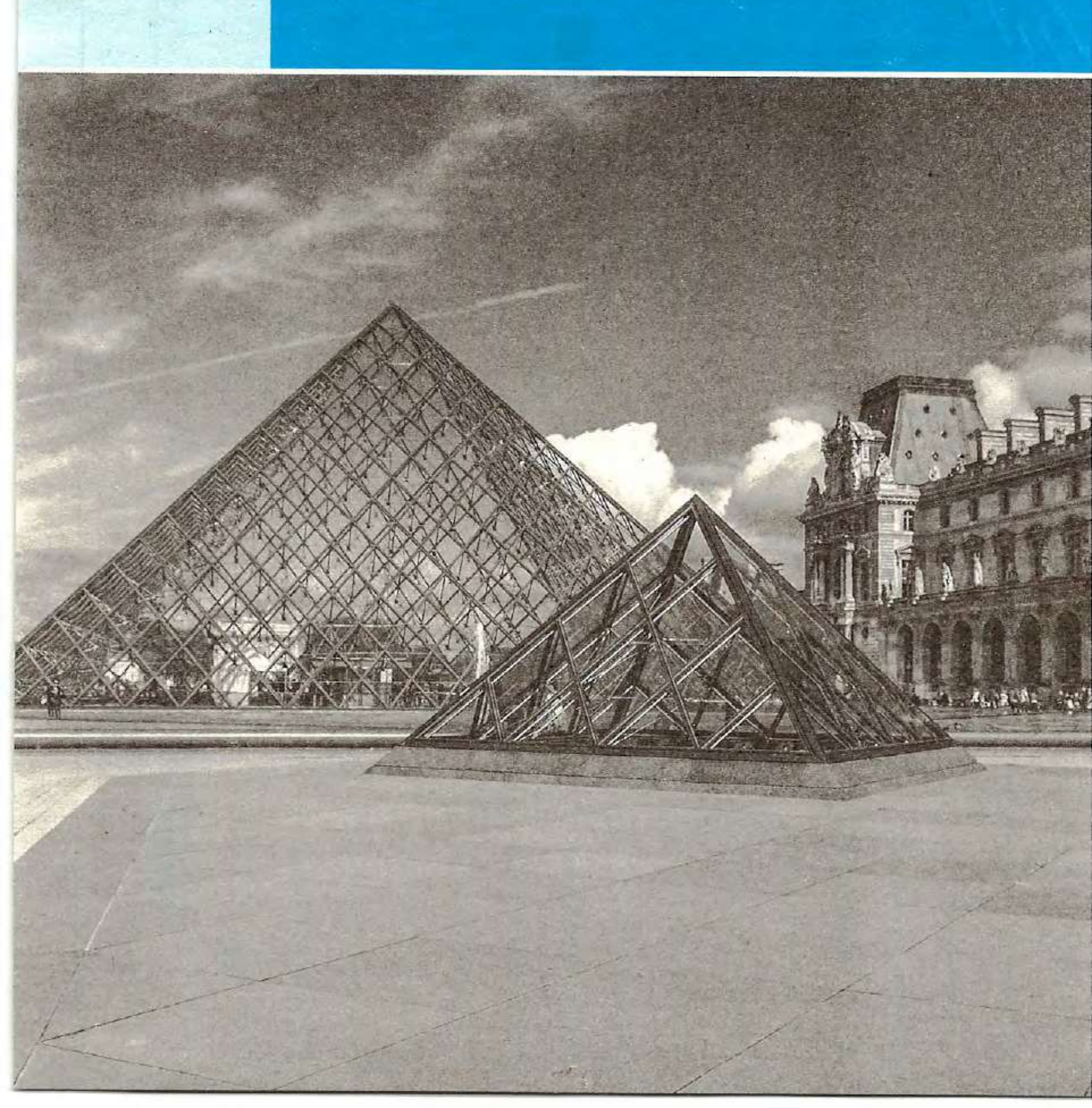
ش × $\frac{١٥}{٢٥}$ + ش − ٤٠٠ = ٠

$\frac{٨}{٥}$ ش = ٤٠٠ ∴ ش = ٢٥٠ ث.جم

بالتعويض فى (١) : ∴ ١٠٠٠ − ٥ ق = ٠

∴ ق = ٢٠٠ ث.جم

إجابات تمارين
الهندسة والقياس



إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 6

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (د)

⑥ (د) ⑦ (جـ) ⑧ (أ) ⑨ (د) ⑩ (د)

⑪ (أ) ⑫ (ب) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ب)

⑯ (د) ⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (أ) ⑳ (جـ)

㉑ (جـ) ㉒ (ب) ㉓ (جـ) ㉔ (د) ㉕ (د)

㉖ (د) ㉗ (أ) ㉘ (د) ㉙ (د) ㉚ (ب)

㉛ (ب) ㉜ (أ) ㉝ (جـ)

㉞ أولاً : (جـ) ثانيًا : (أ)
ثالثًا : (ب) رابعًا : (د)

㉟ أولاً : (أ) ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (جـ)

(٣٦) أولاً : (ب) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (د)

(٣٧) أولاً : (أ) ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (أ)
خامسًا : (ب)

(٣٨) أولاً : (أ) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (جـ)

(٣٩) أولاً : (ب) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (د) رابعًا : (جـ)
خامسًا : (د)

(٤٠) أولاً : (أ) ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (جـ)

(٤١) (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① ٨ مستقيمات تحمل أحرفه

② أب ، أء ، أم

③ ٥ مستويات تحمل أوجهه

④ المستويات : أبحء ، أبم ، أءم

٢

① أب ، أء ، أأَ ② أب

③ أبَبَأ ، أبحء ، أءءَأ

④ أبَبَأ ، أبحء ، أبحَءَ

٣

① أء ، أأَ ، بحـ ، بَبَ

② أب ، ءحـ ، ءحـ

③ أء ، بحـ ، ءء ، حـحـ

٤

① عدد لا نهائى ② عدد لا نهائى

③ عدد لا نهائى ④ مستوى واحد فقط

٥

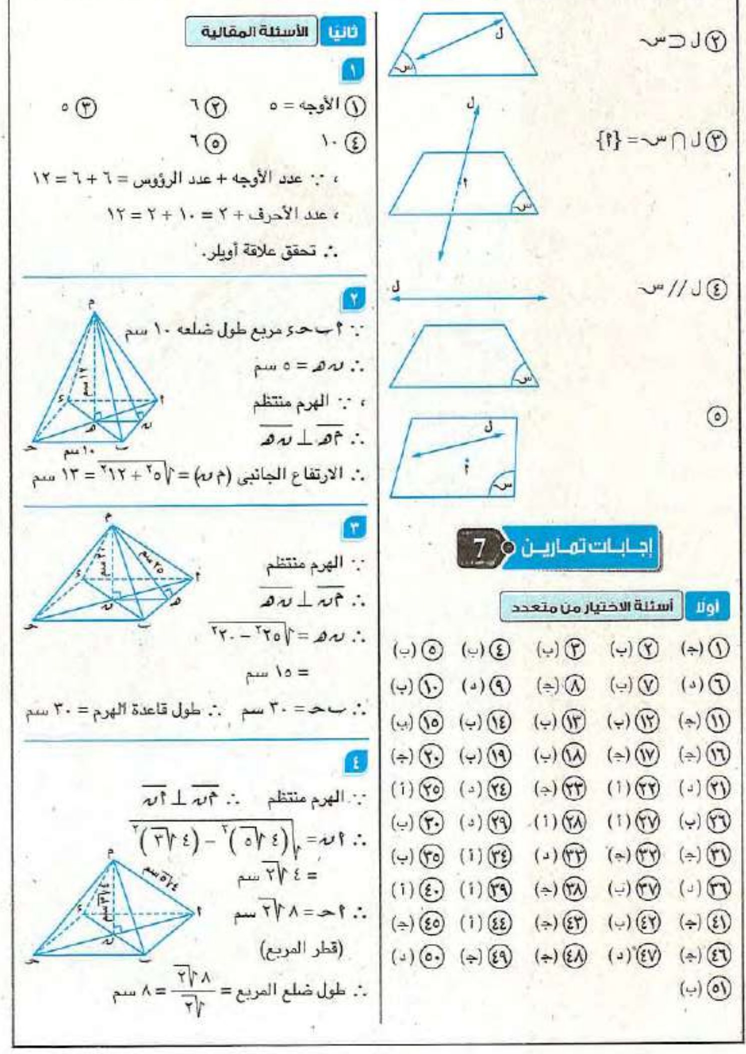
① (١) متخالفان (٢) متوازيان (٣) متخالفان
(٤) متوازيان (٥) متخالفان (٦) متقاطعان

② (١) متوازيان (٢) متقاطعان (٣) متقاطعان

③ $\sqrt{(٦\sqrt{٢})^{٢} + (٦)^{٢}} = ٦\sqrt{٣}$ سم

٦

① أ ∈ ل



② ل ⊂ س

③ ل ∩ س = {أ}

④ ل // س

⑤

إجابات تمارين 7

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (ب) ③ (ب) ④ (ب) ⑤ (ب)

⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (د) ⑩ (ب)

⑪ (جـ) ⑫ (ب) ⑬ (ب) ⑭ (ب) ⑮ (ب)

⑯ (جـ) ⑰ (جـ) ⑱ (ب) ⑲ (ب) ⑳ (جـ)

㉑ (د) ㉒ (أ) ㉓ (جـ) ㉔ (د) ㉕ (أ)

㉖ (ب) ㉗ (أ) ㉘ (أ) ㉙ (د) ㉚ (ب)

㉛ (جـ) ㉜ (جـ) ㉝ (د) ㉞ (أ) ㉟ (ب)

(٣٦) (د) (٣٧) (ب) (٣٨) (جـ) (٣٩) (أ) (٤٠) (أ)

(٤١) (جـ) (٤٢) (ب) (٤٣) (جـ) (٤٤) (أ) (٤٥) (جـ)

(٤٦) (جـ) (٤٧) (د) (٤٨) (جـ) (٤٩) (جـ) (٥٠) (د)

(٥١) (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① الأوجه = ٥ ② ٦ ③ ٥

④ ١٠ ⑤ ٦

، ∵ عدد الأوجه + عدد الرؤوس = ٦ + ٦ = ١٢

، عدد الأحرف + ٢ = ١٠ + ٢ = ١٢

∴ تحقق علاقة أويلر.

٢

∵ أبحء مربع طول ضلعه ١٠ سم

∴ نهـ = ٥ سم

، ∵ الهرم منتظم

∴ مهـ ⊥ نهـ

∴ الارتفاع الجانبى (من) = $\sqrt{٥^{٢} + ١٢^{٢}}$ = ١٣ سم

٣

∵ الهرم منتظم

∴ من ⊥ نهـ

∴ نهـ = $\sqrt{٢٥^{٢} - ٢٠^{٢}}$

= ١٥ سم

∴ بحـ = ٣٠ سم ∴ طول قاعدة الهرم = ٣٠ سم

٤

∵ الهرم منتظم ∴ من ⊥ أن

∴ أن = $\sqrt{(٤\sqrt{٥})^{٢} - (٤\sqrt{٣})^{٢}}$

= $٤\sqrt{٢}$ سم

∴ أحـ = $٨\sqrt{٢}$ سم

(قطر المربع)

∴ طول ضلع المربع = $\frac{٨\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = ٨ سم

٥

نفرض ء منتصف $\overline{أب}$

، ∵ Δ أبح متساوى الأضلاع

∴ $\overline{حء} \perp \overline{أب}$

∴ حء = $\sqrt{(١٢)^٢ - (٦)^٢}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ ن نقطة تلاقى متوسطات المثلث أبح

∴ ن ح = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ $\sqrt{٣}$ = ٤ $\sqrt{٣}$

∴ Δ م ن ح قائم الزاوية فى ن

∴ م ح = $\sqrt{٦^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ $\sqrt{٢١}$ سم

٦

بفرض ء منتصف $\overline{أب}$

، ∵ Δ أبح متساوى الأضلاع

∴ $\overline{حء} \perp \overline{أب}$

∴ حء = $\sqrt{(٣)^٢ - (١,٥)^٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن ح}$

، ن نقطة تلاقى متوسطات Δ أبح

∴ ح ن = $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ Δ م ن ح قائم الزاوية فى ن

∴ م ن = $\sqrt{(\sqrt{٧})^٢ - (\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ سم

∴ ارتفاع الهرم = ٢ سم

٧

∵ بفرض ء منتصف $\overline{أب}$

، ∵ Δ أبح متساوى الأضلاع

∴ حء = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم الوجوه ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن ح}$

، ن نقطة تلاقى متوسطات Δ أبح

∴ ح ن = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

∴ Δ م ن ح قائم الزاوية فى ن

∴ م ن = $\sqrt{١٢^٢ - (٤\sqrt{٣})^٢}$ = ٤ $\sqrt{٦}$ سم

∴ ارتفاع الهرم = ٤ $\sqrt{٦}$ سم

، ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ فى Δ أب م متساوى الأضلاع

∴ $\overline{مء} \perp \overline{أء}$

∴ مء = $\sqrt{(١٢)^٢ - ٦^٢}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

∴ الارتفاع الجانبى = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

٨

طول ضلع القاعدة = ٢٤ $\sqrt{٣}$ ÷ ٦

= ٤ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم

∴ $\overline{م ن} \perp \overline{أ ن}$

، ن هى المركز الهندسى للقاعدة

∴ أ ن = طول ضلع القاعدة = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

∴ أ م = $\sqrt{٨^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$ = ٤ $\sqrt{٧}$ سم

∴ طول حرف الهرم الجانبى = ٤ $\sqrt{٧}$ سم

وبفرض س منتصف $\overline{أب}$

، ∵ م أ = م ب ∴ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$

∴ م س = $\sqrt{(٤\sqrt{٧})^٢ - (٢\sqrt{٣})^٢}$ = ١٠ سم

٩

بفرض س منتصف $\overline{أب}$

، ∵ م أ = م ب

∴ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$

∴ م س = $\sqrt{(١٣٠)^٢ - (٥٠)^٢}$

= ١٢٠ سم

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = ١٢٠ سم

، ∵ الهرم منتظم ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن س}$

، ∵ ن المركز الهندسى للقاعدة ∴ ن س = ٥٠ سم

∴ م ن = $\sqrt{(١٢٠)^٢ - (٥٠)^٢}$ = ١٠ $\sqrt{١١٩}$ سم

∴ ارتفاع الهرم = ١٠ $\sqrt{١١٩}$ سم

١٠

شكل (١) : (هرم رباعى منتظم)

∵ الهرم منتظم

∴ $\overline{م ن} \perp \overline{س ن}$

، ن المركز الهندسى للقاعدة

∴ س ن = ٥ سم

∴ م ن = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم

∴ ارتفاع الهرم = ١٢ سم

شكل (٢) : (هرم ثلاثى منتظم الوجوه)

بفرض س منتصف $\overline{أب}$

، ∵ Δ أبح متساوى الأضلاع

∴ $\overline{ح س} \perp \overline{أب}$

∴ ح س = $\sqrt{٦^٢ - ٣^٢}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم الوجوه ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن ح}$

، ن هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث أبح

∴ ن ح = ٢ $\sqrt{٣}$ سم

، م ن = $\sqrt{٦^٢ - (٢\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ $\sqrt{٦}$

∴ ارتفاع الهرم = ٢ $\sqrt{٦}$ سم

١١

∵ الهرم منتظم

∴ $\overline{م ن} \perp \overline{س ن}$

، ن هو المركز الهندسى للقاعدة

∴ س ن = ١١٦ متر

∴ م ن = $\sqrt{(١٨٦)^٢ - (١١٦)^٢}$ ≃ ١٤٥,٤ متر

∴ ارتفاع الهرم ≃ ١٤٥,٤ متر

١٢

∵ Δ أبح قائم الزاوية فى أ

∴ ب ح = $\sqrt{(١٢,٦)^٢ + (١٦,٨)^٢}$

= ٢١ سم

، ∵ $\overline{أء}$ متوسط مرسوم من أ

∴ أء = نصف طول الوتر = ١٠,٥ سم

، ∵ الهرم قائم ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن أ}$

، ن نقطة تلاقى متوسطات المثلث

∴ أ ن = $\frac{٢}{٣}$ × ١٠,٥ = ٧ سم

، ∵ Δ م ن أ قائم فى ن

∴ الارتفاع (م ن) = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (٧)^٢}$ = ٢٤ سم

١٣

∵ الهرم قائم

∴ $\overline{م ن} \perp \overline{أح}$ ، $\overline{م ن} \perp \overline{بء}$

∴ م ب = م ء = $\sqrt{(١٠)^٢ + ٦^٢}$ = ٢ $\sqrt{٣٤}$ سم

، م أ = م ح = $\sqrt{(١٠)^٢ + ٨^٢}$ = ٢ $\sqrt{٤١}$ سم

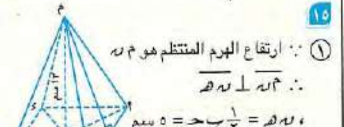
١٤

∵ مساحة قاعدة الهرم = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ١٨ × جا ٦٠°

= ٨١ $\sqrt{٣}$ سم^٢

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ٨١ $\sqrt{٣}$ × ١٢ = ٣٢٤ $\sqrt{٣}$ سم^٣

١٥



① ∵ ارتفاع الهرم المنتظم هو م ن

∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{ن هـ}}$

، ن هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٥ سم

∴ م هـ = $\sqrt{(١٢)^٢ + ٥^٢}$

= ١٣ سم

∴ الارتفاع الجانبى = ١٣ سم

② حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣} \times (١٠)^٢ \times ١٢$ = ٤٠٠ سم^٣

③ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢} \times (٤ \times ١٠) \times ١٣ + (١٠ \times ١٠)$

= ٢٦٠ + ١٠٠ = ٣٦٠ سم^٢

١٦

الارتفاع الجانبى = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$

= ٢٠ سم

① المساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢} \times (٤ \times ٢٠) \times ٢٠$

= ٨٠٠ سم^٢

② حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣} \times (٢٠)^٢ \times ١٠\sqrt{٣}$

= $\frac{٤٠٠٠}{٣}\sqrt{٣}$ سم^٣

١٧

قاعدة الهرم المنتظم مربعة طول قطرها $٢٤\sqrt{٢}$ سم

∴ طول ضلعها = ٢٤ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢} \times (٤ \times ٢٤) \times ٢٠$

= ٩٦٠ سم^٢

∴ المساحة الكلية = المسافة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٩٦٠ + (٢٤ × ٢٤) = ١٥٣٦ سم^٢

ارتفاع الهرم = $\sqrt{(٢٠)^٢ - (١٢)^٢}$ = ١٦ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣} \times (٢٤)^٢ \times ١٦$ = ٣٠٧٢ سم^٣

١٨

① ∵ م أ ب حـ ء هرم قائم

قاعدته مربع

∴ الهرم منتظم

، ارتفاعه الجانبى

= $\sqrt{(٤\sqrt{٦})^٢ - (٤\sqrt{٢})^٢}$ = ٨ سم

∴ المساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢} \times (٤ \times ٨\sqrt{٢}) \times ٨ = ١٢٨\sqrt{٢}$ سم^٢

② ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = $٤\sqrt{٢}$

∴ فى △ م هـ ن:

ارتفاع الهرم م ن = $\sqrt{٨^٢ - (٤\sqrt{٢})^٢} = ٤\sqrt{٢}$ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣} \times (٨\sqrt{٢})^٢ \times ٤\sqrt{٢}$

= $\frac{٥١٢}{٣}\sqrt{٢}$ سم^٣

١٩

① فى △ م أ هـ:

م هـ = $\sqrt{(٢٦)^٢ - (١٠)^٢}$

= ٢٤ سم

(الارتفاع الجانبى)

② فى △ م هـ ن:

م ن = $\sqrt{(٢٤)^٢ - (١٠)^٢}$

= $٢\sqrt{١١٩}$ سم (ارتفاع الهرم)

③ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢} \times (٤ \times ٢٠) \times ٢٤$ = ٩٦٠ سم^٢

④ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣} \times (٢٠)^٢ \times ٢\sqrt{١١٩}$

= $\frac{٨٠٠}{٣}\sqrt{١١٩}$ سم^٣

٢٠

∵ الهرم ثلاثى منتظم الوجوه

∴ ٢ ل^٢ = ٣ ع^٢ ∴ ٢ × (١٢)^٢ = ٣ × ع^٢

∴ ع = $٤\sqrt{٦}$ سم

، حجم الهرم = $\frac{١}{٣} \times \left(\frac{١}{٢}\text{ل}^٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) \times$ ع

= $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} \times (١٢)^٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٤\sqrt{٦}$

= $١٤٤\sqrt{٢}$ سم^٣

، مساحته الكلية = ل$^٢\sqrt{٣}$ = $(١٢)^٢ \times \sqrt{٣} = ١٤٤\sqrt{٣}$ سم^٢

٢١

① ∵ م أ ب حـ ء هرم قائم قاعدته مربعة

∴ الهرم منتظم

، ارتفاعه الجانبى

= $\sqrt{(١٥)^٢ - ٩^٢}$ = ١٢ سم

∴ مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢} \times (١٨ \times ٤) \times ١٢ + (١٨)^٢$

= ٤٣٢ + ٣٢٤ = ٧٥٦ سم^٢

② ارتفاع الهرم = $\sqrt{(١٢)^٢ - ٩^٢} = ٣\sqrt{٧}$ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣} \times (١٨)^٢ \times ٣\sqrt{٧}$

= $٣٢٤\sqrt{٧}$ سم^٣

٢٢

مساحة القاعدة = $\frac{ن}{٤}$ × س^٢ × ظتا $\frac{\pi}{ن}$

= $\frac{٥}{٤} \times (١٦)^٢ \times$ ظتا $\frac{١٨٠^\circ}{٥}$

≈ ٤٤٠,٤٤ سم^٢

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ٤٤٠,٤٤ × ١٢ ≃ ١٧٦١,٨ سم^٣

٢٣

① المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢} \times (٦ \times ١٢) \times ١٠\sqrt{٣}$

= $٣٦٠\sqrt{٣}$ سم^٢

② مساحة القاعدة = $\frac{ن}{٤}$ س^٢ ظتا $\frac{\pi}{ن}$

= $\frac{٦}{٤} \times (١٢)^٢ \times$ ظتا $\frac{١٨٠^\circ}{٦}$

= $٢١٦\sqrt{٣}$ سم^٢

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $٣٦٠\sqrt{٣} + ٢١٦\sqrt{٣}$

= $٥٧٦\sqrt{٣}$ سم^٢

٢٤

① مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢} \times (٦)^٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٩\sqrt{٣}$ سم^٢

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢} \times (٣ \times ٦) \times ١٠$ = ٩٠ سم^٢

المساحة الكلية = $(٩٠ + ٩\sqrt{٣})$ ≃ ١٠٥,٦ سم^٢

② مساحة القاعدة = (١٢)^٢ = ١٤٤ سم^٢

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢} \times (١٢ \times ٤) \times ١٥$

= ٣٦٠ سم^٢

، المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٣٦٠ + ١٤٤ = ٥٠٤ سم^٢

③ مساحة القاعدة = $(20)^2 = 400$ سم²

الارتفاع الجانبى = $\sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ سم

المساحة الجانبية = $\frac{1}{2} \times (20 \times 4) \times 26$

= 1040 سم²

، المساحة الكلية = $1040 + 400 = 1440$ سم²

④ مساحة القاعدة = $\frac{6}{4} \times (10)^2 \times$ ظتا $\frac{\pi}{6}$

= $150\sqrt{3} \approx 259.8$ سم²

الارتفاع الجانبى = $\sqrt{(13)^2 - 5^2}$

= 12 سم

المساحة الجانبية = $\frac{1}{2} \times (6 \times 10) \times 12$

= 360 سم²

المساحة الكلية = $360 + 259.8 = 619.8$ سم²

25

① الحجم = $\frac{1}{3} \times (10)^2 \times 21 = 700$ سم³

② الحجم = $\frac{1}{3} \left(\frac{6}{4} \times 8^2 \times \text{ظتا } \frac{\pi}{6}\right) \times 14$

= $448\sqrt{3}$ سم³

③ مساحة القاعدة = $\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

= $9\sqrt{3}$ سم²

الحجم = $\frac{1}{3} \times (9\sqrt{3}) \times 12 = 36\sqrt{3}$ سم³

④ أ د = $\sqrt{(17)^2 - (15)^2}$

= 8 سم

∴ أ ب (طول الضلع) = 16 سم

، د ن = 8 سم

، ارتفاع الهرم = $\sqrt{(15)^2 - 8^2} = \sqrt{161}$ سم

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3} \times (16)^2 \times \sqrt{161}$

= $\frac{256}{3}\sqrt{161}$ سم³ ≈ 1082.8 سم³

26

حجم الهرم الرباعى = $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 8\right) \times 12$

= 64 سم³

حجم المكعب = $(4)^3 = 64$ سم³

∴ الحجمين متساويان.

27

محيط القاعدة = $5 + 6 + 7 = 18$

∴ نصف محيط القاعدة (ع) = 9 سم

مساحة القاعدة = $\sqrt{ع(ع - أ)(ع - ب)(ع - جـ)}$

= $\sqrt{9 \times (9-5) \times (9-6) \times (9-7)}$

= $6\sqrt{6}$

الحجم = $\frac{1}{3} \times 6\sqrt{6} \times 15 = 30\sqrt{6}$ سم³

28

قاعدة الهرم المنتظم مربعة مساحتها = 700 سم²

∴ طول الضلع = $10\sqrt{7}$ سم

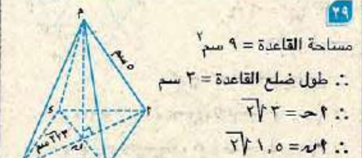
الارتفاع = $\sqrt{(20)^2 - (5\sqrt{7})^2}$

= 15 سم

حجم الهرم = $\frac{1}{3} \times (700) \times 15$

= 3500 سم³

29



مساحة القاعدة = 9 سم²

∴ طول ضلع القاعدة = 3 سم

∴ أ جـ = $3\sqrt{2}$

∴ أ ن = $1.5\sqrt{2}$

∴ فى Δ م أ ن

∴ م ن (الارتفاع) = $\sqrt{5^2 - (1.5\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{82}$

∴ الحجم = $\frac{1}{3} \times 9 \times \frac{1}{2}\sqrt{82}$

= $\frac{3}{2}\sqrt{82} \approx 13.6$ سم³

30

∵ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ $400 = \frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × 12

∴ مساحة القاعدة = 100

∴ طول ضلع القاعدة = 10 سم

، ارتفاعه الجانبى

= $\sqrt{5^2 + (12)^2} = 13$ سم

، ∵ مساحته الجانبية

= $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{1}{2} \times (4 \times 10) \times 13 = 260$ سم²

31

∵ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ $1296 = \frac{1}{3} \times (18)^2 \times$ الارتفاع

∴ ارتفاع الهرم = 12 سم

∴ الارتفاع الجانبى = $\sqrt{9^2 + (12)^2}$

= 15 سم

، المساحة الجانبية = $\frac{1}{2} \times (4 \times 18) \times 15$

= 540 سم²

32

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$384 = \frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

+ مساحة القاعدة

= $\frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times$ الارتفاع الجانبى

$+ 12 \times 12$

∴ الارتفاع الجانبى = 10 سم

∴ ارتفاع الهرم = $\sqrt{(10)^2 - 6^2}$

= 8 سم

∴ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3} \times (12)^2 \times 8 = 384$ سم³

33

∵ طول قطر القاعدة المربعة = $10\sqrt{2}$ سم

∴ طول الضلع = 10 سم

المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

$260 = \frac{1}{2} \times (4 \times 10)$ × الارتفاع الجانبى

∴ الارتفاع الجانبى = 13 سم

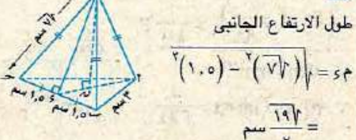
∴ ارتفاع الهرم = $\sqrt{(13)^2 - 5^2} = 12$ سم

∴ الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3} \times (10)^2 \times 12 = 400$ سم³

34





طول الارتفاع الجانبى

م د = $\sqrt{(\sqrt{7})^2 - (1.5)^2}$

= $\frac{\sqrt{19}}{2}$ سم

∵ أ د = $\sqrt{3^2 - (1.5)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

، ∵ ن د = $\frac{1}{3}$ أ د = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ ارتفاع الهرم م ن = $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

= 2 سم

∴ الحجم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × ع

= $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(3)^2$ جا $60° \times 2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ سم³

، مساحته الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{1}{2} \times (3 \times 3) \times \frac{\sqrt{19}}{2}$

= $\frac{9}{4}\sqrt{19}$ سم²

٣٥

∵ الشكل السداسي منتظم

∴ $\text{ن ب} = \text{ب حـ} = ٤\sqrt{٣}$

∴ في Δ م ن ب:

$\text{م ب} = \sqrt{٨^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$

$= ٤\sqrt{٧}$

، في Δ م ص ب:

$\text{م ص} = \sqrt{(٤\sqrt{٧})^٢ - (٢\sqrt{٣})^٢} = ١٠$ سم

∴ الارتفاع الجانبي = ١٠ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

$= \frac{١}{٢} \times ٢٤\sqrt{٣} \times ١٠$

$= ١٢٠\sqrt{٣}$ سم²

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$= ١٢٠\sqrt{٣} + \left[\frac{٦}{٤} \times (٤\sqrt{٣})^٢ \text{ ظتا } \frac{\pi}{٦}\right]$

$= ١٩٢\sqrt{٣}$ سم²

٣٦

∵ القاعدة مثلث متساوي الأضلاع تمر برؤوس دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = ٢$ نق (من قانون الجيب)

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا } ٦٠} = ٢ \times ١٢$

∴ $\text{أ} = ١٢\sqrt{٣}$

∴ طول ضلع القاعدة $= ١٢\sqrt{٣}$

، من Δ أ ب ء:

∴ $\text{أ ء} = \sqrt{(١٢\sqrt{٣})^٢ - (٦\sqrt{٣})^٢} = ١٨$ سم

∴ $\text{ن ء} = \frac{١}{٣} \text{ أ ء} = ٦$ سم

، من Δ م ن ء: ∴ $\text{م ن} = \sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢} = ٨$ سم

، ∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ حجم الهرم $= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} (١٢\sqrt{٣})^٢ \text{ جا } ٦٠ \times ٨$

$= ٢٨٨\sqrt{٣}$ سم³

٣٧

بفرض أن ب و = ل

∴ $\text{و هـ} = \frac{١}{٢} \text{ ب حـ} = \text{ل}$ ، وبالمثل ء و = هـ و = ل

∴ Δ ء هـ و متساوي الأضلاع وطول ضلعه = ل

∴ الشبكة لمجسم هرم ثلاثي منتظم الوجوه

ويكون $\frac{١٨}{\text{ل}} = \text{جا } ٦٠°$

∴ $\text{ل} = ١٢\sqrt{٣}$ سم

مساحته الكلية = ٤ × مساحة أي وجه فيها

$= ٤ \times \frac{١}{٢} \times (١٢\sqrt{٣})^٢ \text{ جا } ٦٠°$

$= ٤٣٢\sqrt{٣}$ سم²

٣٨

الشكل بعد طيه يعطي هرم رباعي منتظم ارتفاعه الجانبي $= \sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢} = ١٢$ سم

مساحة العبوة الواحدة

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ١٠ \times ١٢ + ١٠^٢ = ٢٤٠ + ١٠٠ = ٣٤٠$ سم²

(١) مساحة ١٠٠٠ عبوة = ٣٤٠٠٠٠ سم² = ٣٤ م²

(٢) التكلفة = ٣٤ × ١٥ = ٥١٠ جنيه

٣٩



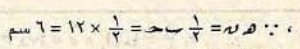
Δ م ن أ قائم في ن

∴ $\text{ن أ} = \sqrt{(٦\sqrt{٥})^٢ - (٦\sqrt{٣})^٢}$

$= ٦\sqrt{٢}$ سم

∴ $\text{أ حـ} = ١٢\sqrt{٢}$ ∴ طول قطر المربع $= ١٢\sqrt{٢}$

∴ طول ضلع المربع = ١٢ سم



، ∵ $\text{هـ ن} = \frac{١}{٢} \text{ ب حـ} = \frac{١}{٢} \times ١٢ = ٦$ سم

∴ في Δ م هـ ن

$\text{م هـ} = \sqrt{٦^٢ + (٦\sqrt{٣})^٢} = ١٢$ سم

∴ الارتفاع الجانبي = ١٢ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

$= \frac{١}{٢} \times (٤ \times ١٢) \times ١٢ = ٢٨٨$ سم²

المساحة الكلية $= ٢٨٨ + (١٢)^٢ = ٤٣٢$ سم²

الحجم $= \frac{١}{٣} \times (١٢)^٢ \times ٦\sqrt{٣} = ٢٨٨\sqrt{٣}$ سم³

٤٠



حجم النموذج = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \times (١١,٥)^٢ \times ٧$

$\simeq ٣٠٨,٥٨$ سم³

الكتلة = الكثافة × الحجم

$= ٣,٢ \times ٣٠٨,٥٨ \simeq ٩٨٧,٥$ جم

٤١



الارتفاع الجانبي

$\text{م هـ} = \sqrt{(٢١,٦)^٢ + (١٧,٥)^٢}$

$\simeq ٢٧,٨$ م

مساحة الزجاج = المساحة الجانبية للهرم

$= \frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

$= \frac{١}{٢} \times (٤ \times ٣٥) \times ٢٧,٨$

$\simeq ١٩٤٦$ م²

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١



∵ ب ن = ب حـ = ٢ ل

∴ في Δ م ن ب:

$\text{م ب} = \sqrt{(٣\text{ل})^٢ + (٢\text{ل})^٢}$

$= \sqrt{١٣}\text{ ل}$

، في Δ م ب ص:

$\text{م ص} = \sqrt{(\sqrt{١٣}\text{ ل})^٢ - \text{ل}^٢} = ٢\sqrt{٣}\text{ ل}$

∴ الارتفاع الجانبي $= ٢\sqrt{٣}$ ل

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

$= \frac{١}{٢} \times (٢\text{ ل} \times ٦) \times ٢\sqrt{٣}\text{ ل}$

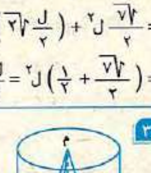
$= ١٢\sqrt{٣}\text{ ل}^٢$ سم²

، مساحة القاعدة $= \frac{٦}{٤} \times (٢\text{ ل})^٢ \times \text{ظتا } \frac{\pi}{٦}$

$= ٦\sqrt{٣}\text{ ل}^٢$ سم²

∴ المساحة الجانبية = ٢ مساحة القاعدة

٢



∵ طول قطر القاعدة = ل

∴ طول ضلع القاعدة $= \frac{\text{ل}\sqrt{٢}}{٢}$

∴ الارتفاع الجانبي

$= \sqrt{\text{ل}^٢ - \left(\frac{\text{ل}\sqrt{٢}}{٤}\right)^٢} = \frac{\sqrt{١٤}}{٤}\text{ ل}$

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

$= \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}\text{ ل}}{٢} \times ٤ \times \frac{\sqrt{١٤}}{٤}\text{ ل}$

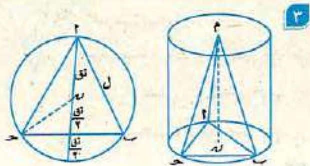
$= \frac{\sqrt{٧}}{٢}\text{ ل}^٢$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$= \frac{\sqrt{٧}}{٢}\text{ ل}^٢ + \left(\frac{\text{ل}}{٢}\sqrt{٢}\right)^٢$

$= \left(\frac{\sqrt{٧}}{٢} + \frac{١}{٢}\right)\text{ل}^٢ = \frac{\text{ل}^٢}{٢}(١ + \sqrt{٧})$

٣



∵ الهرم قائم

∴ ارتفاعه يلاقى القاعدة ؟ب ح عند مركزها (ن)

وهى نقطة تلاقى المتوسطات.

ويفرض نصف قطر دائرة القاعدة = نق

وارتفاع الاسطوانة = ارتفاع الهرم = ع

مساحة قاعدة الاسطوانة = π نق^{٢}

، ∵ جا ٦٠° = $\frac{١٫٥ \text{ نق}}{\text{ل}}$

∴ ل (طول ضلع قاعدة الهرم) = نق $\sqrt{٣}$

∴ مساحة قاعدة الهرم = $\frac{١}{٢}$ (نق $\sqrt{٣}$)^{٢} جا ٦٠°

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ نق^{٢}

∴ $\frac{\text{حجم الهرم}}{\text{حجم الاسطوانة}} = \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} \text{نق}^{٢} \times \text{ع}}{\pi \text{ نق}^{٢} \text{ع}} = \frac{\sqrt{٣}}{٤\pi}$

٤

نفرض أن طول ضلع قاعدته = طول حرفه الجانبى = ل

مساحة القاعدة = ل^{٢}

، ارتفاعه الجانبى

$= \frac{\text{ل}}{٢}\sqrt{٣}$

ل ، ل ، وجه جانبى ، $\frac{\text{ل}}{٢}$ ، $\frac{\text{ل}}{٢}$

∴ مساحته الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times \text{ل} \times \frac{\text{ل}}{٢}\sqrt{٣}$

$=$ ل$^{٢}\sqrt{٣}$

المساحة الكلية = ل$^{٢}\sqrt{٣}$ + ل^{٢} = ل^{٢} ($\sqrt{٣}$ + ١)

∴ ل^{٢} ($\sqrt{٣}$ + ١) = ($\sqrt{٣}$ + ١) ٤

∴ ل^{٢} = ٤ ∴ ل = $\sqrt{٤}$

∴ طول حرفه = $\sqrt{٤}$

إجابات تمارين 8

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (جـ)

⑥ (د) ⑦ (أ) ⑧ (ب) ⑨ (أ) ⑩ (د)

⑪ (أ) ⑫ (د) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ب)

⑯ (جـ) ⑰ (جـ) ⑱ (د) ⑲ (جـ) ⑳ (جـ)

㉑ (جـ) ㉒ (د) ㉓ (ب) ㉔ (أ) ㉕ (د)

㉖ (ب) ㉗ (جـ) ㉘ (ب)

㉙ أولاً : (ب) ثانيًا : (جـ) ثالثًا : (د)

رابعًا : (ب) خامسًا : (ب)

㉚ (د) ㉛ (د) ㉜ (ب) ㉝ (أ) ㉞ (جـ)

㉟ (جـ) ㊱ (د) ㊲ (جـ) ㊳ (جـ) ㊴ (ب)

㊵ (أ) ㊶ (جـ) ㊷ (جـ) ㊸ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① الحجم = $\frac{١}{٣} \times \pi (٩)^{٢} \times ١٤$

$= ٣٧٨ \pi$ سم^{٣}

② نق = $\sqrt{(٢٦)^{٢} - (٢٤)^{٢}} = ١٠$ سم

الحجم = $\frac{١}{٣} \times \pi (١٠)^{٢} \times ٢٤$

$= ٨٠٠ \pi$ سم^{٣}

③ الارتفاع = $\sqrt{(١٣)^{٢} - ٥^{٢}} = ١٢$ سم

الحجم = $\frac{١}{٣} \times \pi (٥)^{٢} \times ١٢$

$= ١٠٠ \pi$ سم^{٣}

٢

① المساحة الجانبية = π (٦) × ١٢ = ٧٢ π سم^{٢}

، المساحة الكلية = π (٦) (٦ + ١٢)

$= ١٠٨ \pi$ سم^{٢}

② طول الراسم (ل) = $\sqrt{(١٢)^{٢} + ٩^{٢}} = ١٥$ سم

المساحة الجانبية = π (٩) × ١٥ = ١٣٥ π سم^{٢}

، المساحة الكلية = π (٩) (٩ + ١٥) = ٢١٦ π سم^{٢}

③ نق = $\sqrt{(١٥)^{٢} - (١٣)^{٢}} = ٢\sqrt{١٤}$ سم

المساحة الجانبية = π ($٢\sqrt{١٤}$) × ١٥

$= ٣٠\sqrt{١٤}\, \pi$ سم^{٢}

المساحة الكلية = π ($٢\sqrt{١٤}$) ($٢\sqrt{١٤}$ + ١٥)

= ($٥٦ + ٣٠\sqrt{١٤}$) π سم^{٢}

٣

∴ نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} - \text{ع}^{٢}} = \sqrt{(١٧)^{٢} - (١٥)^{٢}} = ٨$ سم

المساحة الجانبية = π نق ل = π (٨) × ١٧

$= ١٣٦ \pi$ سم^{٢}

المساحة الكلية = π نق (نق + ل)

= π (٨) (٨ + ١٧) = ٢٠٠ π سم^{٢}

الحجم = $\frac{١}{٣} \pi$ نق^{٢} ع

$= \frac{١}{٣} \times \pi \times ٨^{٢} \times (١٥) = ٣٢٠ \pi$ سم^{٣}

٤

∵ المخروط قائم

∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{؟ ن}}$

∴ نق = $\sqrt{(٢٦)^{٢} - (٢٤)^{٢}} = ١٠$ سم

∴ محيط القاعدة = ٢ π نق = ٢٠ π سم

، مساحة القاعدة = π نق^{٢} = ١٠٠ π سم^{٢}

٥

الشكل الموضح يصنع مخروط

محيط قاعدته = ٤٤ سم

∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٤٤

∴ نق = ٧ سم

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{؟ ن}}$

∴ ارتفاع المخروط = م ن = $\sqrt{(٢١)^{٢} - ٧^{٢}}$

= ١٤ $\sqrt{٢}$ سم

٦

∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق ل

∴ ٢٠ π = $\frac{١}{٢}$ نق × ٨ π

∴ نق = ٥ سم وهو يمثل

راسم المجسم

، ∵ طول قوس القطاع = محيط القاعدة

∴ ٨ π = ٢ π نق َ

∴ نق َ = ٤ سم (وهو يمثل طول نصف قطر قاعدة المخروط)

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{؟ ن}}$

∴ ارتفاع المجسم = م ن = $\sqrt{(٥)^{٢} - (٤)^{٢}} = ٣$ سم

٧

الشبكة تمثل مجسم

لمخروط دائرى قائم

، ∵ مساحة الدائرة = ٤٩ π سم^{٢}

∴ π نق^{٢} = ٤٩ π

∴ طول نصف قطر القاعدة = ٧ سم

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{؟ ن}}$

∴ م ن = $\sqrt{(٢٥)^{٢} - (٧)^{٢}} = ٢٤$ سم

∴ ارتفاع المخروط = ٢٤ سم

٨

طول نصف قطر دائرة القطاع نق = ١٢ سم

يمثل راسم المخروط

، ∵ مساحة القطاع = ١٥٠ سم^{٢}

∴ $\frac{١}{٢}$ نق ل = ١٥٠

∴ $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ل = ١٥٠

∴ ل = ٢٥ سم وهو يمثل محيط قاعدة المخروط

∴ ٢٥ = ٢ π نقَ

∴ طول نصف قطر قاعدة المخروط = $\frac{٢٥}{٢π}$ سم

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{أن} \perp \overline{نب}$

∴ ارتفاع المخروط = $\sqrt{(١٢)^{٢} - (\frac{٢٥}{٢π})^{٢}}$ ≃ ١١,٣ سم

٩

∵ نق = ٥ سم

∴ طول راسمه (ل) = $\sqrt{٥^{٢} + (١٢)^{٢}}$ = ١٣ سم

المساحة الكلية = π (٥) (٥ + ١٣) = ٩٠ π

≃ ٢٨٢,٧ سم^{٢}

١٠

∵ محيط القاعدة = ٤٤ ∴ ٢ π نق = ٤٤

∴ نق = $\frac{٢٢}{π}$

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π $(\frac{٢٢}{π})^{٢}$ × ٢٥

= ١٢٨٣,٨ سم^{٣}

١١

Δ أ ب م قائم الزاوية في ب ، ق (∠ أ م ب) = ٣٠°

∴ أ م = ٢ × ٥ = ١٠ سم ∴ ل = ١٠ سم

المساحة الجانبية = π (٥) × ١٠ = ٥٠ π سم^{٢}

المساحة الكلية = π (٥) (٥ + ١٠) = ٧٥ π سم^{٢}

١٢

∵ المساحة الجانبية = π نق ل

∴ ٩٦ π = π (٨) ل ∴ ل = ١٢ سم

∴ ع = $\sqrt{(١٢)^{٢} - ٨^{٢}}$ = ٤ $\sqrt{٥}$ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π $(٨)^{٢}$ × ٤ $\sqrt{٥}$ ≃ ٥٩٩,٥ سم^{٣}

١٣

<u>الأول (أ) :</u>

سعته = $\frac{١}{٣}$ π $(\frac{٥}{٢})^{٢}$ × ١١ = $\frac{٢٧٥}{١٢}$ π سم^{٣}

<u>الثاني (ب) :</u>

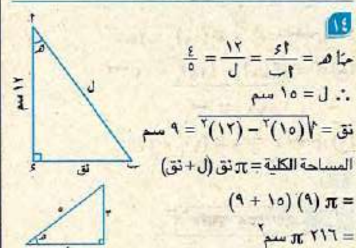
سعته = $\frac{١}{٣}$ π $(\frac{١١}{٢})^{٢}$ × ٥ = $\frac{٦٠٥}{١٢}$ π سم^{٣}

∴ الثاني (ب) أكبر من الأول (أ) في السعة

الفرق بين سعتيهما = $\frac{٦٠٥}{١٢}$ π − $\frac{٢٧٥}{١٢}$ π

= $\frac{٥٥}{٢}$ π سم^{٣}

١٤



جتا هـ = $\frac{أ د}{أ ب}$ = $\frac{١٢}{ل}$ = $\frac{٤}{٥}$

∴ ل = ١٥ سم

نق = $\sqrt{(١٥)^{٢} - (١٢)^{٢}}$ = ٩ سم

المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

= π (٩) (١٥ + ٩)

= ٢١٦ π سم^{٢}

١٥

∵ حجم الصهريج = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

٣٢ π = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ٦

نق^{٢} = ١٦ ∴ نق = ٤ م

ل = $\sqrt{نق^{٢} + ع^{٢}}$ = $\sqrt{٤^{٢} + ٦^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$ م

مساحته الكلية = π نق (ل + نق)

= π × ٤ × (٢ $\sqrt{١٣}$ + ٤)

= (١٦ + ٨ $\sqrt{١٣}$) π ≃ ١٤٠,٩ م^{٢}

١٦

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ π × $(١٥)^{٢}$ × ٢٠

= ١٥٠٠ π سم^{٣} ≃ ٤٧١٢,٤ سم^{٣}

، ∵ طول ضلع القاعدة = ٤٨ ÷ ٤ = ١٢ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(١٢)^{٢}$ × ٤٠ = ١٩٢٠ سم^{٣}

∴ حجم المخروط > حجم الهرم.

١٧

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

π ع^{٣} = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} ع ∴ نق^{٢} = ٣ ع^{٢}

المساحة الجانبية = π نق ل = π نق $\sqrt{نق^{٢} + ع^{٢}}$

= π نق $\sqrt{٣ ع^{٢} + ع^{٢}}$ = ٢ π نق ع

= محيط قاعدة الاسطوانة × الارتفاع

= المساحة الجانبية للاسطوانة.

١٨

∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π $(٢)^{٢}$ × ١٢ = ١٦ π سم^{٣}

∴ حجم الماء المزاح على شكل الاسطوانة = ١٦ π سم^{٣}

∴ ١٦ π = π نقَ^{٢} × ١ ∴ نقَ^{٢} = ١٦

∴ نقَ = ٤ سم

∴ طول قطر قاعدة الاناء = ٤ × ٢ = ٨ سم

١٩

حجم الشمع = حجم المكعب = $(٢٠)^{٣}$ = ٨٠٠٠ سم^{٣}

، ∵ ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل

∴ حجم المخروط = ٨٨ ٪ × ٨٠٠٠

= $\frac{٨٨}{١٠٠}$ × ٨٠٠٠ = ٧٠٤٠ سم^{٣}

، ∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

∴ $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٢} × ٢١ = ٧٠٤٠

∴ نق^{٢} = ٣٢٠ ∴ نق = ٨ $\sqrt{٥}$ سم

٢٠

سعة المخروط = ٢,٢ لتر = ٢,٢ × ١٠٠٠ = ٢٢٠٠ سم^{٣}

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

$\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٢} × ٢١ = ٢٢٠٠

نق^{٢} = ١٠٠ ∴ نق = ١٠ سم

٢١

طول راسم المخروط

= ١٨ سم

، ∵ محيط دائرة المخروط

= $\overset{\frown}{أب}$ = نق θ^{ء} = ١٨ × $\frac{٦٠° × π}{١٨٠°}$

∴ ٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

، ع = $\sqrt{ل^{٢} - نق^{٢}}$ = $\sqrt{(١٨)^{٢} - (٣)^{٢}}$ = ٣ $\sqrt{٣٥}$

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × $(٣)^{٢}$ × ٣ $\sqrt{٣٥}$

≃ ١٦٧,٣ سم^{٣}

٢٢

طول راسم المخروط = ٢٠ سم

، محيط دائرة المخروط

= $\overset{\frown}{أب}$ = نق θ^{ء} = ٢٠ × $\frac{٩٠° π}{١٨٠°}$ = ١٠ π

∴ ٢ π نق = ١٠ π ∴ نق = ٥ سم

، ارتفاع المخروط ع = $\sqrt{(٢٠)^{٢} - ٥^{٢}}$ = ٥ $\sqrt{١٥}$

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × $(٥)^{٢}$ × ٥ $\sqrt{١٥}$

= $\frac{١٢٥ \sqrt{١٥}}{٣}$ π سم^{٣}

٢٣

① الجسم الناشئ

مخروط قائم طول نصف قطر

قاعدته = ٦ سم

وارتفاعه = ٨ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π × ٦^{٢} × ٨ = ٩٦ π سم^{٣}

② الجسم الناشئ عبارة عن مخروطين قاعدتهما مشتركة طول نصف قطرها
$= \frac{٦ \times ٨}{١٠} = ٤,٨$ سم

∵ طول راسم الأول = ٨ سم

∴ $ع_١ = \sqrt{٨^٢ - (٤,٨)^٢} = ٦,٤$ سم

∵ طول راسم الثانى = ٦ سم

∴ $ع_٢ = \sqrt{٦^٢ - ٤,٨^٢} = ٣,٦$ سم

∴ حجم الجسم الناتج

$= \frac{١}{٣} \times \pi \times (٤,٨)^٢ \times ٦,٤ + \frac{١}{٣} \times \pi \times (٤,٨)^٢ \times ٣,٦$

$= ٧٦,٨ \, \pi$ سم^٣

٢٤

① حول محور السينات ينتج مخروط

$نق_١ = ٣$ وحدة طوليه ، $ع_١ = ٤$ وحدة طوليه

∴ الحجم $= \frac{١}{٣} \pi (٣)^٢ \times ٤$

$= ١٢ \, \pi$ وحدة مكعبة

② حول محور الصادات

$نق_٢ = ٤$ وحدة طوليه ، $ع_٢ = ٣$ وحدة طولية

الحجم $= \frac{١}{٣} \pi (٤)^٢ \times ٣$

$= ١٦ \, \pi$ وحدة مكعبة

٢٥

الجسم الناتج عبارة عن مخروطين لهما قاعدة مشتركة ومتطابقان

نصف قطرها $= \sqrt{١٠^٢ - ٦^٢}$

$= ٨$ سم

، ارتفاع كل منهما = ٦ سم

الحجم $= ٢ \times \frac{١}{٣} \pi (٨)^٢ \times ٦ = ٢٥٦ \, \pi$ سم^٣

٢٦

∵ $\overline{مهـ}$ متوسط خارج من رأس القائمة فى △ أ م ب

∴ أ ب (طول راسم المخروط) = ٢ × ٩ = ١٨ سم

المساحة الجانبية = π نق ل = $\pi \times ٦ \times ١٨$

$= ١٠٨ \, \pi$ سم^٢

، المساحة الكلية

$= \pi$ نق (نق + ل)

$= \pi \times ٦ \times (٦ + ١٨)$

$= ١٤٤ \, \pi$ سم^٢

، الارتفاع $= \sqrt{(١٨)^٢ - ٦^٢} = ١٢\sqrt{٢}$ سم

الحجم $= \frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع $= \frac{١}{٣} \pi \times (٦)^٢ \times ١٢\sqrt{٢}$

$= ١٤٤\sqrt{٢} \, \pi$ سم^٣

٢٧

* المخروط الأول : $ل_١ = ٨٠$ سم ، $نق_١ = ٥٠$ سم

∴ المساحة الجانبية $= \pi \times ٥٠ \times ٨٠ = ٤٠٠٠ \, \pi$ سم^٢

* المخروط الثانى : $ع_٢ = ١٢٠$ سم ، $نق_٢ = ٥٠$ سم

∴ $ل_٢ = \sqrt{(١٢٠)^٢ + (٥٠)^٢} = ١٣٠$ سم

∴ المساحة الجانبية $= \pi \times ٥٠ \times ١٢٠$

$= ٦٥٠٠ \, \pi$ سم^٢

المساحة المراد طلائها هى مجموع المساحتين الجانبيتين للمخروطين

$= ٤٠٠٠ \, \pi + ٦٥٠٠ \, \pi = ١٠٥٠٠ \, \pi$ سم^٢

$\simeq ٣٢٩٨٧$ سم^٢ $\simeq ٣,٣$ م^٢

∴ التكلفة = ٣,٣ × ٣٠٠ = ٩٩٠ جنيه

٢٨

حجم الهرم الخماسى $= \frac{١}{٣} \times$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \left(\frac{٥}{٤} \times ١٠^٢ \times ظتا \frac{\pi}{٥} \right) \times ٤٢$

$= ٢٤٠٨,٦٧$ سم^٣

حجم المخروط = ٩٠ ٪ من حجم الهرم

$= \frac{٩٠}{١٠٠} \times ٢٤٠٨,٦٧ = ٢١٦٧,٨$ سم^٣

∴ $\frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع $= ٢١٦٧,٨$

$\frac{١}{٣} \times \pi \times (١٥)^٢$ ع $= ٢١٦٧,٨$

ع $= \frac{٢١٦٧,٨}{\frac{١}{٣} \times \pi \times ١٥^٢} \simeq ٩,٢$ سم

٢٩

حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع $= ١٠٠$ سم^٣

① بعد مضاعفة ارتفاعه

∴ حجم المخروط الناتج $= \frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ (٢ ع)

$= ٢ \left[\frac{١}{٣} \pi \right.$ نق^٢ ع$\left. \right] = ٢ \times ١٠٠ = ٢٠٠$ سم^٣

② بعد مضاعفة طول نصف قطره

∴ حجم المخروط الناتج

$= \frac{١}{٣} \pi$ (٢ نق)^٢ (ع) $= \frac{١}{٣} \pi \times ٤$ نق^٢ ع

$= ٤ \left[\frac{١}{٣} \pi \right.$ نق^٢ ع$\left. \right] = ٤ \times ١٠٠ = ٤٠٠$ سم^٣

③ بعد مضاعفة ارتفاعه وطول نصف قطره

∴ حجم المخروط الناتج

$= \frac{١}{٣} \pi$ (٢ نق)^٢ (٢ ع) $= \frac{١}{٣} \pi \times ٤$ نق$^٢ \times ٢$ ع

$= ٨ \left[\frac{١}{٣} \pi \right.$ نق^٢ ع$\left. \right] = ٨ \times ١٠٠ = ٨٠٠$ سم^٣

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (ب) ② (جـ) ③ (د)

④ أولًا : (جـ) ثانيًا : (ب)

⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ حجم نصف كرة = حجم المخروط.

∴ $\frac{١}{٢} \left(\frac{٤}{٣} \pi \right.$ نق$^٣\left. \right) = \frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع

∴ ع = ٢ نق

② ∵ أ م $= \sqrt{(٥ ك)^٢ - (٣ ك)^٢} = ٤$ ك

، ∵ حجم المخروط $= ٩٦ \, \pi$ سم^٣

∴ $\frac{١}{٣} \pi \times (٣ ك)^٢ \times ٤ ك = ٩٦ \, \pi$

∴ ١٢ ك^٣ = ٩٦

∴ ك^٣ = ٨

∴ ك = ٢

∴ نق = ٦ سم ، ع = ٨ سم ، ل = ١٠ سم .

∴ المساحة الكلية = π نق (نق + ل)

$= \pi \times ٦ (٦ + ١٠) = ٩٦ \, \pi$ سم^٢

③ ∵ حجم المخروط $= ٤٩ \, \pi$

∴ $\frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع $= ٤٩ \, \pi$

∴ $\frac{١}{٣} \pi$ نق$^٢ \times ٣ = ٤٩ \, \pi$

∴ نق^٢ = ٤٩ ∴ نق = ٧ سم

∴ طول قوس القطاع المطوى $= ٢ \pi$ نق $= ٢ \pi \times ٧$

$= ١٤ \, \pi$ سم

④ نفرض أن نصف قطر المخروط الأصغر = $نق_١$ وارتفاعه = $ع_١$ وراسمه = $ل_١$

ونصف قطر المخروط الأكبر = $نق_٢$ وارتفاعه = $ع_٢$ ، وراسمه = $ل_٢$

ومن هندسة الشكل نجد أن $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{نق_١}{نق_٢} = \frac{١}{٢}$

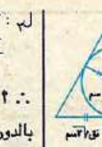
أولًا : $\frac{\text{حجم المخروط الأصغر}}{\text{حجم المخروط الأكبر}} = \frac{\frac{١}{٣} \pi \, نق_١^٢ \, ع_١}{\frac{١}{٣} \pi \, نق_٢^٢ \, ع_٢}$

$= \left(\frac{نق_١}{نق_٢} \right)^٢ \times \frac{ع_١}{ع_٢} = \left(\frac{١}{٢} \right)^٢ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٨}$

ثانيًا : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$

$= \frac{\pi \, نق_١ \, ل_١}{\pi \, نق_٢ \, ل_٢} = \frac{نق_١}{نق_٢} \times \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$

⑤ من هندسة الشكل نجد أن :



مساحة قاعدة الهرم

$= \frac{١}{٢} \times (٢\sqrt{٣}\ \text{نق}) \times ٣\ \text{نق} = ٣\sqrt{٣}\ \text{نق}^{٢}$

، مساحة قاعدة المخروط $= \pi\ \text{نق}^{٢}$

$\frac{\text{حجم الهرم الثلاثى المنتظم}}{\text{حجم أكبر مخروط يمكن وضعه بداخل الهرم}} = \frac{\frac{١}{٣} \times ٣\sqrt{٣}\ \text{نق}^{٢} \times ع}{\frac{١}{٣} \times \pi\ \text{نق}^{٢} \times ع} = \frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$

⑥ من هندسة الشكل نجد أن :

مساحة قاعدة الهرم

$= ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\ \text{نق}^{٢}\ \text{جا}\ ١٢٠^{\circ}\right)$

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\ \text{نق}^{٢}$

، مساحة قاعدة المخروط $= \pi\ \text{نق}^{٢}$

$\therefore \frac{\text{حجم الهرم الثلاثى المنتظم}}{\text{حجم أصغر مخروط يحتويه}} = \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\ \text{نق}^{٢} \times ع}{\frac{١}{٣} \times \pi\ \text{نق}^{٢} \times ع} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

⑦ بفرض أن نصف قطر قاعدة المخروط = نق

وارتفاعه = ع وحجمه ح

∴ بعد الزيادة يكون نصف قطر قاعدة المخروط

$= \frac{٣}{٢}$ نق ، الارتفاع $= \frac{٣}{٢}$ ع وحجمه ح َ

$\therefore \frac{ح َ}{ح} = \frac{\frac{١}{٣}\pi \left(\frac{٣}{٢}\ \text{نق}\right)^{٢} \times \left(\frac{٣}{٢}\ ع\right)}{\frac{١}{٣}\pi \times \text{نق}^{٢} \times ع}$

$= \frac{٩}{٤} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٢٧}{٨}$

∴ ح َ $= \frac{٢٧}{٨}$ ح ∴ ح َ = ٣٣٧,٥٪ ح

٢

ل١ : ٣ س − $\sqrt{٣}$ ص = −٦ بالقسمة على (−٦)

$\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{٢\sqrt{٣}} = ١$

ل٢ : $\sqrt{٣}$ س + ص = ٢ $\sqrt{٣}$ بالقسمة على $(٢\sqrt{٣})$

$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٢\sqrt{٣}} = ١$

∴ أ $(٠ ، ٢\sqrt{٣})$ ، ب (٢ ، ٠) ، جـ (−٢ ، ٠)

بالدوران حول محور السينات ينتج مخروطان لهما نفس القاعدة (نق = ٢ $\sqrt{٣}$ وحدة) ونفس الارتفاع (ع = ٢ وحدة)

∴ المخروطان متطابقان

∴ حجم الجسم الناشىء $= ٢ \times \frac{١}{٣} \times \pi \times (٢\sqrt{٣})^{٢} \times ٢$

$= ١٦\ \pi$ وحدة مكعبة.



٣

① الجسم الناشىء من الدوران عبارة عن أسطوانة دائرية قائمة مضافًا إليها مخروط دائرى قائم ارتفاعه (٧ − ٤) = ٣ سم، ونصف قطر قاعدته = ٣,٥ سم

∴ الحجم $= \pi\ \text{نق}^{٢}\ ع_{١} + \frac{١}{٣}\pi\ \text{نق}^{٢}\ ع_{٢}$

$= \pi \times (٣,٥)^{٢} \times ٤ + \frac{١}{٣}\pi (٣,٥)^{٢} \times ٣$

$= \frac{٢٤٥}{٤}\pi \simeq ١٩٢,٤$ سم٣

② الجسم الناشىء عبارة عن مخروط دائرى قائم ناشىء من دوران Δ جـ أ ب ، نصف قطر قاعدته ٦ سم، وارتفاعه = ٨ سم مطروحًا منه مخروط دائرى قائم ناشىء عن دوران المثلث غير المظلل ، ونصف قطر دائرته = ٣ سم، وارتفاعه = ٨ سم

∴ الحجم $= \frac{١}{٣}\pi (٦)^{٢} \times ٨ - \frac{١}{٣}\pi (٣)^{٢} \times ٨$

$= ٧٢\ \pi \simeq ٢٢٦,٢$ سم٣

③ الجسم الناشىء من الدوران حول $\overline{أب}$ عبارة عن أسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها = أهـ ، وارتفاعها = جـ ء مطروحًا منها مخروطين دائريين قائمين نصف قطر قاعدة كل منها = أهـ ، ارتفاعيهما جـ هـ ، هـ ء

ومن الشكل المقابل :

نلاحظ أن

جـ ء $= \sqrt{(١٥)^{٢} + (٢٠)^{٢}} = ٢٥$ سم

، أهـ $= \frac{١٥ \times ٢٠}{٢٥} = ١٢$ سم

$= \pi (١٢)^{٢} \times ٢٥ - (\frac{١}{٣}\pi (١٢)^{٢} \times$ جـ هـ $+ \frac{١}{٣}\pi (١٢)^{٢} \times$ هـ ء$)$

$= \pi \times (١٢)^{٢} \times ٢٥ - \frac{١}{٣}\pi (١٢)^{٢} \times ($جـ هـ + هـ ء$)$

$= \pi \times (١٢)^{٢} \times ٢٥ - \frac{١}{٣}\pi \times (١٢)^{٢} \times ٢٥$

$= \pi \times (١٢)^{٢} \times ٢٥ \times \frac{٢}{٣} = ٢٤٠٠\ \pi$

$\simeq ٧٥٣٩,٨$ سم٣

إجابات تمارين 9

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (جـ)	③ (ب)	④ (ب)	⑤ (جـ)
⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (جـ)	⑩ (جـ)
⑪ (د)	⑫ (أ)	⑬ (د)	⑭ (د)	⑮ (جـ)
⑯ (جـ)	⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (أ)	⑳ (جـ)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (أ)	㉔ (ب)	㉕ (ب)
㉖ (أ)	㉗ (د)	㉘ (د)	㉙ (د)	㉚ (ب)
㉛ (ب)	㉜ (أ)	㉝ (ب)	㉞ (د)	㉟ (د)
㊱ (د)	㊲ (د)	㊳ (جـ)	㊴ (ب)	㊵ (أ)
㊶ (أ)	㊷ (ب)	㊸ (ب)	㊹ (د)	㊺ (ب)
㊻ (جـ)	㊼ (ب)	㊽ (د)	㊾ (أ)	㊿ (أ)
(٥١) (ب)	(٥٢) (د)	(٥٣) (د)	(٥٤) (أ)	(٥٥) (د)
(٥٦) (أ)	(٥٧) (د)	(٥٨) (د)	(٥٩) (جـ)	(٦٠) (أ)
(٦١) (د)	(٦٢) (د)	(٦٣) (د)	(٦٤) (جـ)	(٦٥) (أ)
(٦٦) (جـ)	(٦٧) (ب)	(٦٨) (ب)	(٦٩) (أ)	(٧٠) (د)
(٧١) (ب)				

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٢٥$

② $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$

③ $(س - ٠)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١٢$

④ $(س + ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = \frac{٩}{٤}$

٢

① $(س + ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = (٤)^{٢}$

أى : $س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س - ٦ ص - ٣ = ٠$

② نق $= \sqrt{(٥ - ٠)^{٢} + (-١٢ - ٠)^{٢}} = ١٣$

∴ $(س - ٥)^{٢} + (ص + ١٢)^{٢} = (١٣)^{٢}$

أى : $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ س + ٢٤ ص = ٠$

③ نق $= \sqrt{(٧ - ٣)^{٢} + (-٥ - ٢)^{٢}} = \sqrt{٦٥}$

∴ $(س - ٧)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = (\sqrt{٦٥})^{٢}$

أى : $س^{٢} + ص^{٢} - ١٤ س + ١٠ ص + ٩ = ٠$

④ مركز الدائرة م $= \left(\frac{٦ + ٠}{٢} ، \frac{-٤ + ٢}{٢}\right)$

$= (٣ ، -١)$

، نق $= \sqrt{(٦ - ٣)^{٢} + (-٤ + ١)^{٢}} = ٣\sqrt{٢}$

∴ $(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = (٣\sqrt{٢})^{٢}$

أى : $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٢ ص - ٨ = ٠$

⑤ ل = ٣ ، ك = ٢

، ∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = |ك| = ٢ ، حـ = ل٢ = ٩

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س + ٤ ص + ٩ = ٠$

⑥ ل = −٣ ، ك = ٠

، ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ نق = |ل| = ٣ ، حـ = ك٢ = ٠

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س = ٠$

⑦ ل = −٥ ، ك = ٥

، ∵ الدائرة تمس محورى الإحداثيات

∴ نق = |ل| = |ك| = ٥ ، حـ = ٢٥

∴ معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ١٠ ص + ٢٥ = ٠

⑧ ∵ المماسان متوازيان عند أ ، ب

∴ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

∴ مركز الدائرة م = $\left(\frac{٦ + ٠}{٢} ، \frac{٢ − ١}{٢}\right)$

$= \left(٣ ، \frac{١}{٢}\right)$

∴ نق = $\sqrt{(٦ − ٣)^{٢} + \left(٢ − \frac{١}{٢}\right)^{٢}} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$

∴ معادلة الدائرة :

(س − ٣)^{٢} + $\left(ص − \frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = $\left(\frac{٣\sqrt{٥}}{٢}\right)^{٢}$

أى : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ص − ٢ = ٠

⑨ مركز الدائرة م = (٥ ، ٠) ، نق = ٣

∴ معادلة الدائرة : (س − ٥)^{٢} + (ص − ٠)^{٢} = (٣)^{٢}

أى : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ١٦ = ٠

⑩ ∵ الدائرة تمس المحورين ، تقع فى الربع الرابع

∴ حـ = ل^{٢} = ك^{٢} = نق^{٢} = ٣٦

، مركز الدائرة م = (٦ ، −٦)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٦)^{٢} + (ص + ٦)^{٢} = (٦)^{٢}

أى : س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ س + ١٢ ص + ٣٦ = ٠

٣

① مركز الدائرة = (٠ ، ٠)

، نق = $\sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$

② مركز الدائرة = (−٣ ، ٥) ، نق = ٧

③ مركز الدائرة = (−٤ ، ٠) ، نق = ٣

④ مركز الدائرة = (٠ ، −٧) ، نق = $\sqrt{٢٤} = ٢\sqrt{٦}$

⑤ ∵ ل = −٢ ، ك = ٣ ، حـ = −١٢

∴ مركز الدائرة = (٢ ، −٣)

، نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − حـ} = \sqrt{٤ + ٩ + ١٢} = ٥$

⑥ ∵ ل = −٤ ، ك = ٠ ، حـ = −١٢

∴ مركز الدائرة = (٤ ، ٠)

، نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − حـ} = \sqrt{١٦ + ٠ + ١٢}$

$= ٢\sqrt{٧}$

٤

① ∵ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٨ ص = ٠

∴ ل = −٢ ، ك = ٤ ، حـ = ٠

∴ نق$_{١}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − حـ} = \sqrt{٤ + ١٦} = ٢\sqrt{٥}$

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ١٢ ص + ١٦ = ٠

∴ ل = ٠ ، ك = ٦ ، حـ = ١٦

∴ نق$_{٢}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − حـ} = \sqrt{٠ + ٣٦ − ١٦}$

$= ٢\sqrt{٥}$

∴ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان متطابقتان

② ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ ص = ١

∴ ل = ٠ ، ك = ٧ ، حـ = −١

∴ نق$_{١}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − حـ} = \sqrt{٠ + ٤٩ + ١} = ٥\sqrt{٢}$

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س − ٢٥ = ٠

∴ ل = ٥ ، ك = ٠ ، حـ = −٢٥

∴ نق$_{٢}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − حـ} = \sqrt{٢٥ + ٢٥} = ٥\sqrt{٢}$

∴ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان متطابقتان

③ ∵ س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٤ ص − ٣ = ٠

∴ ل = −١ ، ك = ٢ ، حـ = −٣

∴ نق$_{١}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − حـ} = \sqrt{١ + ٤ + ٣} = ٢\sqrt{٢}$

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ١١ = ٠

∴ ل = ٣ ، ك = ٠ ، حـ = −١١

∴ نق$_{٢}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} − حـ} = \sqrt{٩ + ٠ + ١١} = ٢\sqrt{٥}$

∴ نق$_{١}$ ≠ نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان غير متطابقتين

٥

∵ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ = ٢ ∴ الدائرتان متطابقتان

، مركز الدائرة د$_{١}$ = (٠ ، ٠)

، مركز الدائرة د$_{٢}$ = (٥ ، ٢)

معادلة الدائرة د$_{١}$ هى : س^{٢} + ص^{٢} = ٤

، معادلة الدائرة د$_{٢}$ هى : (س − ٥)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤

، معادلة الدائرة د$_{٣}$ هى : (س + ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٤

٦

① ∵ المعادلة تشتمل على الحد س ص

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

② ∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = (٤)^{٢} + (−٨)^{٢} + ١ = ٨١ > ٠

∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

③ ∵ معامل س^{٢} ≠ معامل ص^{٢}

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

④ س^{٢} + ص^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ ص − ٤ = ٠

∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = (٠) + $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ + ٤ = $٦\frac{١}{٤}$ > ٠

∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

⑤ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص − ٣ س + ٦ ص − ٤ = ٠

∵ المعادلة تشتمل على الحد س ص

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

⑥ ∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ + (١)^{٢} − ٧

$= \frac{−٢٣}{٤} < ٠$

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

⑦ ∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = (١)^{٢} + (−٢)^{٢} − ٥ = ٠

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

⑧ س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ٣٢ = ٠

∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = (٢)^{٢} + ٣٢ = ٣٦ > ٠

∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

⑨ س^{٢} − ص^{٢} + س − ص − ٧ = ٠

∵ معامل س^{٢} ≠ معامل ص^{٢}

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٧

نق = $\sqrt{(٢ + ١)^{٢} + (−١ − ٣)^{٢}}$ = ٥ وحدة طول.

∴ معادلة الدائرة الأولى د$_{١}$ هى :

(س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥

، معادلة الدائرة الثانية د$_{٢}$ هى :

(س + ١)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٥

٨

∵ د$_{١}$ = س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

∴ م$_{١}$ = (١ ، −٣)

، نق$_{١}$ = $\sqrt{(−١)^{٢} + (٣)^{٢} − ١}$ = ٣ وحدة طول.

، ∵ د$_{٢}$ = س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٦ ص + $\frac{١٥}{٤}$ = ٠

∴ م$_{٢}$ = (١ ، −٣)

، نق$_{٢}$ = $\sqrt{(−١)^{٢} + (٣)^{٢} − \frac{١٥}{٤}}$ = ٢,٥ وحدة طول.

٩

$(س - ٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥$

بالتعويض بالنقط أ ، ب ، حـ ، ء

• أ (٩ ، ٣)

∴ $(٩ - ٦)^{٢} + (٣ + ١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢}$

∴ النقطة أ تقع على الدائرة.

• ب (٧ ، ٥)

∴ $(٧ - ٦)^{٢} + (٥ + ١)^{٢} = ٣٧ > نق^{٢}$

∴ النقطة ب تقع خارج الدائرة.

• حـ (٣ ، ٣)

∴ $(٣ - ٦)^{٢} + (٣ + ١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢}$

∴ النقطة حـ تقع على الدائرة.

• ء (٢ ، −٣)

∴ $(٢ - ٦)^{٢} + (-٣ + ١)^{٢} = ٢٠ < نق^{٢}$

∴ النقطة ء تقع داخل الدائرة.

١٠

$نق = \sqrt{(٢ + ١)^{٢} + (-١ - ٣)^{٢}} = ٥$

، معادلة الدائرة هى : $(س - ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥$

بالتعويض بالنقط ب ، حـ ، ء :

• ب (٢ ، ٤)

∴ $(٢ - ٢)^{٢} + (٤ + ١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢}$

∴ النقطة ب تقع على الدائرة.

• حـ (−٣ ، ١)

∴ $(-٣ - ٢)^{٢} + (١ + ١)^{٢} = ٢٩ > نق^{٢}$

∴ النقطة حـ تقع خارج الدائرة.

• ء (١ ، ٢)

∴ $(١ - ٢)^{٢} + (٢ + ١)^{٢} = ١٠ < نق^{٢}$

∴ النقطة ء تقع داخل الدائرة.

١١

مركز الدائرة = (−٢ ، ٤) ، نق = ٣ وحدة طول.

① طول العمود = $\frac{|٣ \times (-٣) - ٤ \times (٤) + ٥|}{\sqrt{(٣)^{٢} + (-٤)^{٢}}} = ٤ > نق$

∴ المستقيم $ل_{١}$ خارج الدائرة.

② طول العمود = $\frac{|٦ \times (-٣) - ٨ \times ٤ + ٣٣|}{\sqrt{(٦)^{٢} + (-٨)^{٢}}}$

$= ٢,٧ < نق$

∴ المستقيم $ل_{٢}$ قاطع للدائرة.

③ طول العمود = $\frac{|٣ \times (-٣) - ٤ \times ٤ + ١٠|}{\sqrt{(٣)^{٢} + (-٤)^{٢}}}$

$= ٣ = نق$

∴ المستقيم $ل_{٣}$ مماس للدائرة.

١٢

• $د_{١}$: $(س - ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤$

∴ $م_{١}$ = (٥ ، −٢) ، $نق_{١}$ = ٢ وحدة طول.

• $د_{٢}$: $(س + ٧)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ١$

∴ $م_{٢}$ = (−٧ ، ٣) ، $نق_{٢}$ = ١ وحدة طول.

∴ $نق_{١} + نق_{٢}$ = ٣ وحدة طول.

، $م_{١}م_{٢} = \sqrt{(٥ + ٧)^{٢} + (-٢ - ٣)^{٢}} = ١٣$ وحدة طول.

، ∵ $م_{١}م_{٢} > نق_{١} + نق_{٢}$

∴ الدائرتان متباعدتان.

١٣

• $د_{١}$: $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$

∴ $م_{١}$ = (٥ ، ٤)

، $نق_{١} = \sqrt{(-٥)^{٢} + (-٤)^{٢} - ١٦} = ٥$ وحدة طول.

• $د_{٢}$: $س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ س + ١٠ ص - ٢٦ = ٠$

∴ $م_{٢}$ = (−٧ ، −٥)

، $نق_{٢} = \sqrt{(٧)^{٢} + (٥)^{٢} + ٢٦} = ١٠$ وحدة طول.

∴ $نق_{١} + نق_{٢}$ = ١٥ وحدة طول

، $م_{١}م_{٢} = \sqrt{(٥ + ٧)^{٢} + (٤ + ٥)^{٢}} = ١٥$ وحدة طول.

، ∵ $م_{١}م_{٢} = نق_{١} + نق_{٢}$

∴ الدائرتان متماستان من الخارج.

١٤

• $د_{١}$: $(س + ٢)^{٢} + (ص + ١١)^{٢} = ك$

∴ $م_{١}$ = (−٢ ، −١١) ، $نق_{١} = \sqrt{ك}$ وحدة طول.

، $د_{٢}$: $(س - ٣)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ١٦$

∴ $م_{٢}$ = (٣ ، ١) ، $نق_{٢}$ = ٤ وحدة طول.

، إذا كانت الدائرتان متماستين من الخارج.

∴ $نق_{٢} + نق_{١} = م_{١}م_{٢}$

∴ $\sqrt{(٣ + ٢)^{٢} + (١ + ١١)^{٢}} = ٤ + \sqrt{ك}$

∴ $١٣ = ٤ + \sqrt{ك}$ ∴ ك = ٨١

، إذا كان الدائرتان متماستين من الداخل.

∴ $|نق_{٢} - نق_{١}| = م_{١}م_{٢}$ ∴ $|٤ - \sqrt{ك}| = ١٣$

∴ $٤ - \sqrt{ك} = ١٣$ (مرفوض) أ، $٤ - \sqrt{ك} = -١٣$

∴ $\sqrt{ك} = ٤ + ١٣ = ١٧$ ∴ ك = ٢٨٩

١٥

نقطة التماس :

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ٤ ص + ١٢$

$= س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س - ٤ ص - ٤$

∴ $- ٦ س - ٤ ص + ١٢ = ٢ س - ٤ ص - ٤$

∴ $- ٦ س - ٢ س = - ١٢ - ٤$

∴ $- ٨ س = -١٦$ ∴ **س = ٢**

بالتعويض فى معادلة الدائرة الأولى عن س = ٢

∴ $(٢)^{٢} + ص^{٢} - ٦ \times ٢ - ٤ ص + ١٢ = ٠$

$ص^{٢} - ٤ ص + ٤ = ٠$ ∴ **ص = ٢**

الدائرتان متقاطعتان فى نقطة واحدة (٢ ، ٢)

∴ الدائرتان متماستان

معادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، ٢) وتمر بمركز الدائرة الثانية (−١ ، ٢)

$نق = \sqrt{(٢ + ١)^{٢} + (٠)^{٢}} = ٣$

المعادلة $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٩$

١٦

$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

، ∵ (٢ أ جتا هـ ، ٢ أ جا هـ) ∈ للدائرة

∴ $(٢ أ جتا هـ)^{٢} + (٢ أ جا هـ)^{٢} = ١$

∴ $٤ أ^{٢} (جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ) = ١$

∴ $٤ أ^{٢} = ١$ ∴ $أ = \pm \frac{١}{٢}$

١٧

① ∵ $ل^{٢} + ك^{٢} - حـ > ٠$

∴ $(-١)^{٢} + (-٢)^{٢} + هـ - ٢ > ٠$

∴ هـ > −٣ ∴ هـ ∈]−٣ ، ∞[

② ∵ $ل^{٢} + ك^{٢} - حـ > ٠$

∴ $(٢)^{٢} + (-٣)^{٢} + هـ^{٢} - ٤ > ٠$

∴ $هـ^{٢} + ٩ > ٠$ وهذا صحيح لجميع قيم هـ ∈ ح

∴ هـ ∈ ح

③ ∵ $ل^{٢} + ك^{٢} - حـ > ٠$

∴ $(-٢ هـ)^{٢} + (-هـ)^{٢} - ١٠ (هـ - ١) > ٠$

∴ $٤ هـ^{٢} + هـ^{٢} - ١٠ هـ + ١٠ > ٠$

∴ $هـ^{٢} - ٢ هـ + ٢ > ٠$

∴ $(هـ - ١)^{٢} + ١ > ٠$ وذلك يتحقق لكل هـ ∈ ح

④ ∵ $ل^{٢} + ك^{٢} - حـ > ٠$

∴ $(٣)^{٢} + (٤)^{٢} - هـ^{٢} + ٣ هـ - ١٥ > ٠$

∴ $٩ + ١٦ - هـ^{٢} + ٣ هـ - ١٥ > ٠$

∴ هـ² − ٣هـ − ١٠ > ٠

∴ (هـ + ٢) (هـ − ٥) < ٠

وذلك يتحقق لكل هـ ∈]−٢ ، ٥[

(٥) ∵ ل² + ك² − حـ > ٠

∴ هـ² + (−٣هـ)² + ٢هـ² − ١٢هـ + ٣ > ٠

∴ هـ² + ٩هـ² + ٢هـ² − ١٢هـ + ٣ > ٠

∴ ١٢هـ² − ١٢هـ + ٣ > ٠

∴ ٤هـ² − ٤هـ + ١ > ٠

∴ (٢هـ − ١)² > ٠ وذلك يتحقق لكل هـ ∈ ح

١٨

(١) ∵ ل² + ك² − حـ > ٠

∴ (−١)² + (٢)² − ٢أ + ٣ > ٠

∴ −٢أ > −٨ ∴ أ < ٤

∴ أ ∈]−∞ ، ٤[

(٢) ∵ الدائرة تمر بنقطة الأصل

∴ حـ = ٠ ∴ ٢أ − ٣ = ٠ ∴ أ = ٣/٢

(٣) ∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ حـ = ل² ∴ ٢أ − ٣ = (−١)²

∴ أ = ٢

(٤) ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ حـ = ك² ∴ ٢أ − ٣ = (٢)²

∴ أ = ٧/٢

(٥) م = (١ ، −٢)

∵ الدائرة تمس المستقيم :

٣س + ٤ص + ١٥ = ٠

∴ نق = |٣ × ١ + ٤ × (−٢) + ١٥| ÷ √((٣)² + (٤)²) = ٢

، ∵ نق = √(ل² + ك² − حـ)

∴ √((−١)² + (٢)² − ٢أ + ٣) = ٢ ، بالتربيع

∴ ١ + ٤ − ٢أ + ٣ = ٤ ∴ أ = ٢

(٦) ∵ نق = ٧ وحدة طولية

∴ √((−١)² + (٢)² − ٢أ + ٣) = ٧ ، بالتربيع

∴ ١ + ٤ − ٢أ + ٣ = ٤٩ ∴ أ = −٤١/٢

١٩

(١) ∵ الدائرة تمس المستقيم : س = ٢

∴ نق = ٣

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٥)² + (ص − ٤)² = ٩

أى أن : س² + ص² − ١٠س − ٨ص + ٣٢ = ٠

(٢) معادلة المستقيم هى : (ص − ٧)/(س − ٣) = (٣ − ٧)/(٣ + ١)

أى أن : −س + ص − ٤ = ٠

∴ نق = |−١ × ٥ + ١ × ٣ − ٤| ÷ √((−١)² + (١)²) = ٣√٢

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٥)² + (ص − ٣)² = ١٨

أى أن : س² + ص² − ١٠س − ٦ص + ١٦ = ٠

(٣) نق = ٣ ، م = (٤ ، ٥)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٤)² + (ص − ٥)² = ٩

أى أن : س² + ص² − ٨س − ١٠ص + ٣٢ = ٠

(٤) ∵ الدائرة تمس محور السينات عند (٤ ، ٠) ، نق = ٥

∴ م = (٤ ، ٥) أ، (٤ ، −٥)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٤)² + (ص − ٥)² = ٢٥

أى أن : س² + ص² − ٨س − ١٠ص + ١٦ = ٠

أ، المعادلة هى : (س − ٤)² + (ص + ٥)² = ٢٥

أى أن : س² + ص² − ٨س + ١٠ص + ١٦ = ٠

(٥) ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ م = (٣½ ، −٤) أ، (−٣½ ، −٤)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٣½)² + (ص + ٤)² = ١٢٫٢٥

أى أن : س² + ص² − ٧س + ٨ص + ١٦ = ٠

أ، المعادلة هى :

(س + ٣½)² + (ص + ٤)² = ١٢٫٢٥

أى أن : س² + ص² + ٧س + ٨ص + ١٦ = ٠

(٦) ∵ الدائرة تمس المحورين

، ∵ النقطة (−٢ ، −٤) فى الربع الثالث

∴ المركز م = (−نق ، −نق)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س + نق)² + (ص + نق)² = نق²

، ∵ (−٢ ، −٤) ∈ الدائرة

∴ (−٢ + نق)² + (−٤ + نق)² = نق²

∴ ٤ + نق² − ٤نق + ١٦ + نق² − ٨نق = نق²

∴ نق² − ١٢نق + ٢٠ = ٠

∴ (نق − ٢) (نق − ١٠) = ٠

∴ نق = ٢ ومنها م = (−٢ ، −٢) أ، نق = ١٠

ومنها م = (−١٠ ، −١٠)

∴ توجد معادلتان هما :

(س + ٢)² + (ص + ٢)² = ٤

أى أن : س² + ص² + ٤س + ٤ص + ٤ = ٠

أ، (س + ١٠)² + (ص + ١٠)² = ١٠٠

أى أن : س² + ص² + ٢٠س + ٢٠ص + ١٠٠ = ٠

(٧) ∵ الدائرة تمس محور السينات عند (−٣ ، ٠)

، وتمس محور الصادات.

∴ نق = ٣

، توجد دائرتان مركزاهما (−٣ ، ٣) ، (−٣ ، −٣)

، معادلة الدائرة الأولى هى :

(س + ٣)² + (ص − ٣)² = ٩

أى أن : س² + ص² + ٦س − ٦ص + ٩ = ٠

، معادلة الدائرة الثانية هى :

(س + ٣)² + (ص + ٣)² = ٩

أى أن : س² + ص² + ٦س + ٦ص + ٩ = ٠

(٨) نق = √((٢)² + (٢√٣)²)

∴ نق = ٤

∴ مركز الدائرة م = (−٢ ، ٤)

∴ حـ = ٤ + ١٦ − ١٦ = ٤

∴ معادلة الدائرة هى :

س² + ص² + ٤س − ٨ص + ٤ = ٠

(٩) نق = √((١)² + (٢√٦)²) = ٥

∴ مركز الدائرة م = (−٥ ، −١)

∴ حـ = ك² = ١

∴ معادلة الدائرة هى :

س² + ص² + ١٠س + ٢ص + ١ = ٠

(١٠) ∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = |ك| ، حـ = ل²

∴ معادلة الدائرة هى :

سـ^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل سـ + ٢ ك ص + ل^{٢} = ٠

، ∵ (٢ ، ١) تحقق المعادلة

∴ ٤ + ١ + ٤ ل + ٢ ك + ل^{٢} = ٠

∴ ٤ ل + ٢ ك + ل^{٢} = −٥ (١)

، ∵ (−٥ ، ٢) تحقق المعادلة :

∴ ٢٥ + ٤ − ١٠ ل + ٤ ك + ل^{٢} = ٠

∴ −١٠ ل + ٤ ك + ل^{٢} = −٢٩ (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح : ∴ ١٤ ل − ٢ ك = ٢٤

∴ ك = ٧ ل − ١٢ وبالتعويض فى (١)

∴ ٤ ل + ٢ (٧ ل − ١٢) + ل^{٢} = −٥

∴ ل^{٢} + ١٨ ل − ١٩ = ٠

∴ (ل + ١٩) (ل − ١) = ٠

∴ ل = −١٩ أ، ل = ١

ومنها ك = −١٤٥ أ، ك = −٥

∴ توجد دائرتان

∴ المعادلة الأولى هى :

سـ^{٢} + ص^{٢} − ٣٨ سـ − ٢٩٠ ص + ٣٦١ = ٠

والأخرى : سـ^{٢} + ص^{٢} + ٢ سـ − ١٠ ص + ١ = ٠

(١١) ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ نق = |ل| ، حـ = ك^{٢}

∴ معادلة الدائرة هى :

سـ^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل سـ + ٢ ك ص + ك^{٢} = ٠

، ∵ (−٤ ، ٢) تحقق المعادلة :

∴ ١٦ + ٤ − ٨ ل + ٤ ك + ك^{٢} = ٠

أى أن : −٨ ل + ٤ ك + ك^{٢} = −٢٠ (١)

، ∵ (−١ ، ٢) تحقق المعادلة :

∴ ١ + ٤ − ٢ ل + ٤ ك + ك^{٢} = ٠

أى أن : −٢ ل + ٤ ك + ك^{٢} = −٥ (٢)

بطرح (١) من (٢) :

∴ ٦ ل = ١٥ ∴ ل = $\frac{٥}{٢}$ ومن المعادلة (٢)

∴ −٥ + ٤ ك + ك^{٢} = −٥

∴ ك^{٢} + ٤ ك = ٠ ∴ ك (ك + ٤) = ٠

∴ ك = ٠ أ، ك = −٤ ∴ توجد دائرتان.

معادلة الأولى هى : سـ^{٢} + ص^{٢} + ٥ سـ = ٠

، معادلة الأخرى هى :

سـ^{٢} + ص^{٢} + ٥ سـ − ٨ ص + ١٦ = ٠

(١٢) ∵ الدائرة يقع مركزها على محور السينات :

∴ معادلة الدائرة هى :

سـ^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل سـ + حـ = ٠

، ∵ (١ ، ٣) تحقق المعادلة :

∴ ١ + ٩ + ٢ ل + حـ = ٠

ومنها ٢ ل + حـ = −١٠ (١)

، ∵ (٢ ، −٤) تحقق المعادلة :

∴ ٤ + ١٦ + ٤ ل + حـ = ٠

ومنها ٤ ل + حـ = −٢٠ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ل = −٥ ، حـ = صفر

∴ معادلة الدائرة هى : سـ^{٢} + ص^{٢} − ١٠ سـ = ٠

(١٣) م = (٦ ، ٨)

، أب = $\sqrt{(١٢)^{٢} + (١٦)^{٢}}$

= ٢٠

∴ نق = ١٠

∴ معادلة الدائرة هى :

(سـ − ٦)^{٢} + (ص − ٨)^{٢} = ١٠٠

أى أن : سـ^{٢} + ص^{٢} − ١٢ سـ − ١٦ ص = ٠

(١٤) ∵ مركز الدائرة يقع على المستقيم ص − سـ = ١

∴ المركز (− ل ، − ك) يحقق المعادلة

أى أن : − ك + ل = ١ (١)

∴ معادلة الدائرة هى :

سـ^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل سـ + ٢ ك ص + حـ = ٠

∵ (−٢ ، ٤) تحقق معادلة الدائرة

∴ ٤ + ١٦ − ٤ ل + ٨ ك + حـ = ٠

ومنها −٤ ل + ٨ ك + حـ = −٢٠ (٢)

، ∵ (٦ ، ٨) تحقق معادلة الدائرة

∴ ٣٦ + ٦٤ + ١٢ ل + ١٦ ك + حـ = ٠

ومنها ١٢ ل + ١٦ ك + حـ = −١٠٠ (٣)

بطرح (٢) من (٣) :

∴ ١٦ ل + ٨ ك = −٨٠

∴ ٢ ل + ك = −١٠ (٤)

وبجمع (٤) ، (١) : ∴ ٣ ل = −٩ ∴ ل = −٣

، من (١) : ∴ ك = −٤ ، من (٢) ∴ حـ = ٠

∴ معادلة الدائرة هى :

سـ^{٢} + ص^{٢} − ٦ سـ − ٨ ص = ٠

(١٥) ∵ نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} − حـ

∴ ٨٥ = ل^{٢} + ك^{٢} − حـ (١)

، معادلة الدائرة هى :

سـ^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل سـ + ٢ ك ص + حـ = ٠

، ∵ (−١ ، ٢) تحقق معادلة الدائرة

∴ ١ + ٤ − ٢ ل + ٤ ك + حـ = ٠

أى أن : −٢ ل + ٤ ك + حـ = −٥ (٢)

، ∵ (٣ ، ٤) تحقق معادلة الدائرة

∴ ٩ + ١٦ + ٦ ل + ٨ ك + حـ = ٠

أى أن : ٦ ل + ٨ ك + حـ = −٢٥ (٣)

من (٢) ، (٣) بالطرح : ٨ ل + ٤ ك = −٢٠

∴ ك = −٥ − ٢ ل (٤)

وبالتعويض فى (٢) :

∴ −٢ ل + ٤ (−٥ − ٢ ل) + حـ = −٥

∴ حـ = ١٥ + ١٠ ل (٥)

بالتعويض من (٤) ، (٥) فى معادلة (١) :

∴ ٨٥ = ل^{٢} + (−٥ − ٢ ل)^{٢} − ١٥ − ١٠ ل

∴ ل^{٢} + ٢٥ + ٢٠ ل + ٤ ل^{٢} − ١٥ − ١٠ ل − ٨٥ = ٠

∴ ٥ ل^{٢} + ١٠ ل − ٧٥ = ٠

∴ ل^{٢} + ٢ ل − ١٥ = ٠

∴ (ل − ٣) (ل + ٥) = ٠ ، ومنها ل = ٣ أ، ل = −٥

∴ ك = −١١ أ، ك = ٥

، حـ = ٤٥ أ، حـ = −٣٥

∴ توجد معادلتان هما :

سـ^{٢} + ص^{٢} + ٦ سـ − ٢٢ ص + ٤٥ = ٠

أ، سـ^{٢} + ص^{٢} − ١٠ سـ + ١٠ ص − ٣٥ = ٠

(١٦) لإيجاد نقط تقاطع الدائرة مع محور السينات

نضع ص = ٠ فى معادلة الدائرة

∴ سـ^{٢} + ٢ سـ = ٠

سـ (سـ + ٢) = ٠

∴ سـ = ٠ أو سـ = −٢

∴ نقط التقاطع أ = (٠ ، ٠) ، ب = (−٢ ، ٠)

م = مركز الدائرة المطلوبة منتصف $\overline{\text{أب}}$

= $\left(\frac{٠ - ٢}{٢} ، \frac{٠}{٢}\right)$

م = (−١ ، ٠)

ونصف قطرها نق = م أ = $\sqrt{(-١)^{٢} + (٠)^{٢}}$ = ١

∴ معادلة الدائرة (سـ + ١)^{٢} + ص^{٢} = ١

٢٠

∵ ل = $\frac{١}{٢}$ ، ك = −٢ ، حـ = −٢

∴ نق^{٢} = $\frac{١}{٤}$ + ٤ + ٢ = ٦$\frac{١}{٤}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} حا $\left(\frac{٣٦٠^{\circ}}{ن}\right)$

= $\frac{٣}{٢}$ × ٦$\frac{١}{٤}$ × حا ١٢٠° = $\frac{٧٥\sqrt{٣}}{١٦}$ وحدة مربعة.

٢١

$\because$ ل $= ٣$ ، ك $= -٦$ ، حـ $= ٥$

$\therefore$ نق$^{٢} = ٩ + ٣٦ - ٥ = ٤٠$

$\therefore$ مساحة الشكل الخماسي المنتظم

$= \frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠^{\circ}}{ن}\right) = \frac{٥}{٢} \times ٤٠ \times$ جا ٧٢°

$\simeq ٩٥{,}١٠٥٦٥$ وحدة مربعة.

، $\because$ الوحدة المربعة تمثل مساحة قدرها $(٥)^{٢} = ٢٥$ سم^{٢}

$\therefore$ مساحة الشكل الخماسي المنتظم

$= ٩٥{,}١٠٥٦٥ \times ٢٥ \simeq ٢٣٧٨$ سم^{٢}

٢٢

ل $= -٥$ ، ك $= ٣$ ، حـ $= ٢٥$

$\therefore$ نق$^{٢} = ٢٥ + ٩ - ٢٥ = ٩$

$\therefore$ مساحة الشكل السداسي المنتظم

$= \frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠^{\circ}}{ن}\right) = \frac{٦}{٢} \times ٩ \times$ جا ٦٠°

$= \frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة.

٢٣

نق$^{٢} = ١٦$

$\therefore$ مساحة المضلع $= \frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠^{\circ}}{ن}\right)$

$= \frac{١٢}{٢} \times ١٦ \times$ جا ٣٠°

$= ٤٨$ وحدة مربعة.

٢٤

مركز الدائرة هو نقطة تقاطع القطرين

٢س $+$ ص $= -٢$ (١)

٤س $-$ ص $= ١٦$ (٢)

من (١) ، (٢) : س $= ٢$ ، ص $= -٨$

$\therefore$ مركز الدائرة م $= (٢ ، -٨)$

$\therefore$ معادلة الدائرة هي : $($س $- ٢)^{٢} + ($ص $+ ٨)^{٢} = ٢٥$

أي أن : س$^{٢} +$ ص$^{٢} - ٤$س $+ ١٦$ص $+ ٤٣ = ٠$

، بالتعويض عن : س $= ٥$ ، ص $= -٤$

$\therefore$ الطرف الأيمن

$= (٥)^{٢} + (-٤)^{٢} - ٤(٥) + ١٦(-٤) + ٤٣$

$= ٠ =$ الطرف الأيسر

$\therefore (٥ ، -٤) \in$ الدائرة.

٢٥

$\because \overrightarrow{ر} = (١ ، ٥) +$ ك $(١ ، ٢)$

أي أن : $\frac{ص - ٥}{س - ١} = ٢$

$\therefore ٢$س $- ٢ =$ ص $- ٥$

$\therefore ٢$س $-$ ص $= -٣$ (١)

، س $+$ ص $= ٠$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore$ نقطة تقاطع القطرين هي : $(-١ ، ١)$

$\therefore$ مركز الدائرة م $= (-١ ، ١)$

$\because$ س$^{٢} +$ ص$^{٢} - ٢$س جتا هـ $- ٢$ص جا هـ $- ٨ = ٠$

$\therefore$ ل $= -$ جتا هـ ، ك $= -$ جا هـ ، حـ $= -٨$

$\therefore$ نق $= \sqrt{جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ + ٨}$

$\therefore$ نق $= \sqrt{١ + ٨} = ٣$

$\therefore$ معادلة الدائرة المطلوبة هي :

$($س $+ ١)^{٢} + ($ص $- ١)^{٢} = ٩$

٢٦

نقط تقاطع الدائرتين :

س$^{٢} +$ ص$^{٢} - ١٠$س $=$ س$^{٢} +$ ص$^{٢} + ٢$س $- ١٢$

$- ١٠$س $- ٢$س $= -١٢$

$- ١٢$س $= -١٢$

$\therefore$ س $= ١$ بالتعويض في معادلة الدائرة الأولى.

$\therefore (١)^{٢} +$ ص$^{٢} - ١٠(١) = ٠$

ص$^{٢} = ٩$ $\therefore$ ص $= \pm ٣$

$\therefore$ نقط التقاطع $(١ ، ٣)$ ، $(١ ، -٣)$

① مركز الدائرة نقطة الاصل $(٠ ، ٠)$

بعد النقطة الأولى عن المركز

$= \sqrt{(١ - ٠)^{٢} + (٣ + ٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$

، بعد النقطة الثانية عن المركز

$= \sqrt{(١ - ٠)^{٢} + (-٣ - ٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$

$\therefore$ النقطتان تقعان على دائرة مركزها $(٠ ، ٠)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

$\therefore$ معادلة الدائرة هي : س$^{٢} +$ ص$^{٢} = ١٠$

② مركز الدائرة النقطة $(٢ ، ٠)$:

بعد النقطة الأولى عن المركز

$= \sqrt{(١ - ٢)^{٢} + (٣ - ٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$

، بعد النقطة الثانية عن المركز

$= \sqrt{(١ - ٢)^{٢} + (-٣ - ٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$

$\therefore$ النقطتان تقعان على دائرة مركزها $(٢ ، ٠)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

$\therefore$ معادلة الدائرة هي : $($س $- ٢)^{٢} +$ ص$^{٢} = ١٠$

٢٧

$\because$ م أ $= \sqrt{(-٥)^{٢} + (-٤)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

، م ب $= \sqrt{(-٤)^{٢} + (-٥)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

، م حـ $= \sqrt{(-٤)^{٢} + (٥)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

$\therefore$ م أ $=$ م ب $=$ م حـ

$\therefore$ أ ، ب ، حـ تقع على دائرة واحدة

، معادلة الدائرة هي :

$($س $+ ٥)^{٢} + ($ص $+ ٥)^{٢} = ٤١$

٢٨

معادلة الدائرة هي :

س$^{٢} +$ ص$^{٢} + ٢$ل س $+ ٢$ك ص $+$ حـ $= ٠$

، $\because$ النقط أ ، ب ، حـ تقع على الدائرة

$\therefore ٩ + ٤ + ٦$ل $- ٤$ك $+$ حـ $= ٠$ (١)

، $٩ + ٦٤ + ٦$ل $+ ١٦$ك $+$ حـ $= ٠$ (٢)

، $١ - ٢$ل $+$ حـ $= ٠$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

$\therefore$ ل $= -٣$ ، ك $= -٣$ ، حـ $= -٧$

$\therefore$ مركز الدائرة م $= (٣ ، ٣)$

$\therefore$ معادلة الدائرة هي :

س$^{٢} +$ ص$^{٢} - ٦$س $- ٦$ص $- ٧ = ٠$

، $\because$ منتصف $\overline{أب} = \left(\frac{٣ + ٣}{٢} ، \frac{-٢ + ٨}{٢}\right)$

$= (٣ ، ٣) =$ م

$\therefore \overline{أب}$ قطر في الدائرة

٢٩

أب $= \sqrt{(٨ - ٠)^{٢} + (٠ - ٦)^{٢}} = ١٠$

ب حـ $= \sqrt{٠ + (٦ - ٠)^{٢}} = ٦$

أ حـ $= \sqrt{(٨ - ٠)^{٢} + ٠} = ٨$

$\because ($أب$)^{٢} = ($ب حـ$)^{٢} + ($أ حـ$)^{٢}$

$\therefore \Delta$ أ ب حـ قائم الزاوية في حـ

$\therefore \overline{أب}$ قطر في الدائرة المارة برؤوسه

مركز الدائرة م $= \left(\frac{٨ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٦}{٢}\right)$

$= (٤ ، ٣)$ ، نق $= ٥$

المعادلة $($س $- ٤)^{٢} + ($ص $- ٣)^{٢} = ٢٥$

٣٠

أب $= \sqrt{(٦)^{٢} + (٠)^{٢}} = ٦$

ب حـ $= \sqrt{(٣)^{٢} + (-٣\sqrt{٣})^{٢}} = ٦$

حـ أ $= \sqrt{(-٣)^{٢} + (-٣\sqrt{٣})^{٢}} = ٦$

$\therefore \Delta$ أ ب حـ متساوي الأضلاع

$\therefore$ مركز الدائرة $= \left(\frac{-٢ + ٤ + ١}{٣} ، \frac{٠ + ٠ + ٣\sqrt{٣}}{٣}\right)$

$= (١ ، \sqrt{٣})$

∴ نق = م أ = $\sqrt{(-٣)^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}}$ = ٢$\sqrt{٣}$

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ١)^{٢} + (ص − $\sqrt{٣}$)^{٢} = ١٢

٣١

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

، ∵ (٢ ، −١) ، (−٢ ، ٠) ، (٠ ، −٩) تحقق معادلة الدائرة.

∴ ٤ + ١ + ٤ ل − ٢ ك + حـ = ٠

أى أن : ٤ ل − ٢ ك + حـ = −٥ (١)

، ٤ − ٤ ل + حـ = ٠ (٢)

، ٨١ − ١٨ ك + حـ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ ل = ١ ، حـ = ٠

ك = $\frac{٩}{٢}$

∴ المعادلة هى : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٩ ص = ٠

، مركز الدائرة م = (−١ ، −٤,٥)

، نق = $\sqrt{١ + (٤,٥)^{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٨٥}}{٢}$ وحدة طول.

٣٢

بفرض أن الدائرة التى تمر بـ أ ، ب ، حـ هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

∴ النقط أ ، ب ، حـ تحقق معادلة الدائرة

∴ ٩ + ٦ ل + حـ = ٠ (١)

، ٨١ + ١٨ ك + حـ = ٠ (٢)

، ١ + ٢ ك + حـ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ل = −٣ ، ك = −٥ ، حـ = ٩

∴ معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ١٠ ص + ٩ = ٠

وبالتعويض بالنقطة ء = (−١ ، ٢)

∴ الطرف الأيمن

= (−١)^{٢} + (٢)^{٢} − ٦ (−١) − ١٠ (٢) + ٩ = ٠

= الطرف الأيسر

∴ النقطة ء ∈ الدائرة.

أى أن الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

٣٣

① س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ٦ ص = ٠

② س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٤ ص + ٤ = ٠

③ س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ ص + ٢٠ = ٠

④ س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ س − ٤ ص + ٣٦ = ٠

⑤ س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ س − ١٥ ص + ٣٦ = ٠

⑥ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٢ ص − ١١ = ٠

⑦ س^{٢} + ص^{٢} − ٢٤ س − ٨ $\sqrt{٣}$ ص + ١٤٤ = ٠

⑧ س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س − ٤ ص + ١٦ = ٠

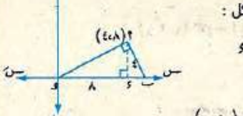
⑨ س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٨ ص + ١٦ = ٠

⑩ س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٢ ص + ١ = ٠

⑪ ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} − ١٧ س + ٨ = ٠

⑫ (س − ٢)^{٢} + (ص − $\sqrt{٣}$)^{٢} = ٣

٣٤





من هندسة الشكل :

(٤)^{٢} = ٨ × ب ء

∴ ب ء = ٢

∴ النقطة ب (١٠ ، ٠)

، ∵ Δ أ ب حـ قائم فى أ

∴ $\overline{\text{ب و}}$ هو قطر فى الدائرة التى تمر بالنقط أ ، ب ، و

∴ مركز الدائرة هى : (٥ ، ٠) ، نق = ٥ وحدة

∴ معادلة الدائرة هى : (س − ٥)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س = ٠

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د)	② (جـ)	③ (ب)	④ (د)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (ب)

إرشادات لحل رقم ١

① بوضع ك − ٢ = ٢ − ك

∴ ٢ ك = ٤ ∴ ك = ٢

عندئذ المعادلة تصبح −٢ س + ٦ ص − ٢٥ = ٠

«معادلة خط مستقيم»

، عند ك ≠ ٢ فإن معامل س^{٢} ≠ معامل ص^{٢}

∴ المعادلة لا تمثل دائرة مهما كانت قيمة ك

② ∵ قاعدة المخروط معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ٦٤

∴ طول نصف قطر قاعدة المخروط = ٨ وحدة طولية.

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ π × ٦٤ × ٦ = ١٢٨ π وحدة مكعبة.

③ ∵ مركز الدائرة = (٧ ، ٥) ، نق = ٤ وحدة طولية.

∴ البعد بين المركز ومحور الصادات

= ٧ وحدات طولية.

∴ أقل بُعد بين محور الصادات وأى نقطة على الدائرة = ٧ − ٤ = ٣ وحدات طولية.

④ ∵ مركز الدائرة التى تمس محورى الإحداثيات لابد وأن يقع على المستقيم ص = س أ، ص = − س



، ∵ الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ تقطع المستقيمان ص = س ، ص = − س

فى أربع نقاط كما بالشكل المقابل.

∴ عدد الدوائر يساوى ٤

⑤ من هندسة الشكل

∵ Δ أ و حـ قائم فى و

، $\overline{\text{و ب}}$ ⊥ $\overline{\text{أ حـ}}$

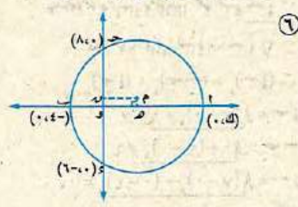
∴ (و ب)^{٢} = ٨ × ٢ = ١٦

∴ و ب = ٤ وحدة طولية.

، ∵ مركز الدائرة = (٠ ، ٠)

∴ معادلة الدائرة هى س^{٢} + ص^{٢} = ١٦

⑥



∵ و ب × و أ = و حـ × و ء

∴ ٤ × و أ = ٨ × ٦

∴ و أ = ١٢

∴ أ = (١٢ ، ٠)

، برسم $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ء حـ}}$

∴ هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ هـ = (٤ ، ٠)

، ن منتصف $\overline{\text{ء حـ}}$ ∴ ن = (٠ ، ١)

∴ م = (٤ ، ١)

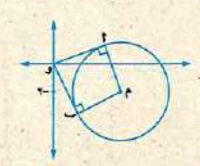
∴ نق = م أ = $\sqrt{(١٢ - ٤)^{٢} + (٠ - ١)^{٢}}$ = $\sqrt{٦٥}$

∴ معادلة الدائرة هى

(س − ٤)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٦٥



⑦



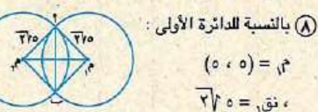
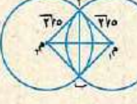
∵ مركز الدائرة المعلومة (م) = (٥ ، -٢)

، ∵ $\overline{\text{مأ}} \perp \overline{\text{أو}}$ ، $\overline{\text{مب}} \perp \overline{\text{وب}}$

∴ الشكل أ م ب و تمر برؤوسه دائرة طول قطرها $\overline{\text{وم}}$ ومركزها هو منتصف $\overline{\text{مو}}$

∴ المركز $\left(\frac{٥ + ٠}{٢} ، \frac{-٢ + ٠}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢} ، -١\right)$

وهى نفس الدائرة التى تمر برؤوس Δ أ و ب

⑧ بالنسبة للدائرة الأولى :

$م_١ = (٥ ، ٥)$

، $نق_١ = ٥\sqrt{٢}$

، بالنسبة للدائرة الثانية :

$م_٢ = (-٣ ، -١)$ ، $نق_٢ = ٥\sqrt{٢}$

، ∵ طول $\overline{م_١م_٢} = \sqrt{(٥ + ٣)^٢ + (٥ + ١)^٢}$

= ١٠ وحدة طولية.

، ∵ $(م_١م_٢)^٢ = (أم_١)^٢ + (أم_٢)^٢$

∴ الشكل أ $م_١$ ب $م_٢$ مربع

∴ أب = ١٠ وحدات طولية.

٢

∵ الدائرة ن تمس محورى الاحداثيات فى الربع الثالث

∴ ن هى (-ل ، -ل) ، تحقق معادلة المستقيم

ص = ٢ س + ١

∴ -ل = -٢ ل + ١ ∴ ل = ١

∴ مركز الدائرة ن هو : (-١ ، -١)

∴ معادلة الدائرة ن هى :

$(س + ١)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١$

ومنها : $س^٢ + ص^٢ + ٢ س + ٢ ص + ١ = ٠$

، ∵ الدائرة م تمس محورى الاحداثيات فى الربع الثانى

∴ م هى (-ك ، ك) ، تحقق معادلة المستقيم

ص = ٢ س + ١

∴ ك = -٢ ك + ١ ∴ ك = $\frac{١}{٣}$

∴ مركز الدائرة م هى : $\left(-\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٣}\right)$

∴ معادلة الدائرة م هى :

$\left(س + \frac{١}{٣}\right)^٢ + \left(ص - \frac{١}{٣}\right)^٢ = \left(\frac{١}{٣}\right)^٢$

أى أن : $س^٢ + ص^٢ + \frac{٢}{٣} س - \frac{٢}{٣} ص + \frac{١}{٩} = ٠$

٣

نرسم : $\overline{\text{مء}} \perp \overleftrightarrow{\text{وص}}$

وبفرض أن طول نصف قطر الدائرة م هو نق

فى Δ م ن ء :

$(٨ + نق)^٢ = (٨)^٢ + (٨ - نق)^٢$

∴ $٦٤ + نق^٢ + ١٦ نق = ٦٤ + ٦٤ + نق^٢ - ١٦ نق$

∴ ٣٢ نق = ٦٤ ∴ نق = ٢

∴ مركز الدائرة م هو : (٨ ، ٢)

∴ معادلة الدائرة م هى :

$(س - ٨)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

أى أن : $س^٢ + ص^٢ - ١٦ س - ٤ ص + ٦٤ = ٠$

تطبيقات حياتية

١

$نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - حـ} = \sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢ - ١١}$

$= \sqrt{١٤}$ وحدة طول.

∴ مساحة الدائرة = π $نق^٢$ = ١٤ π

، ∵ الوحدة المربعة فى المستوى تمثل $(٥)^٢ = ٢٥$ م^٢

∴ مساحة الميدان = ١٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢٥ = ١١٠٠ م^٢

٢

معادلة الدائرة هى : $(س - ٧)^٢ + (ص + ٩)^٢ = (٣٠)^٢$

، ب أ = $\sqrt{(٢٥ - ٧)^٢ + (-٢٠ + ٩)^٢} \approx ٢٧,٦٦$

، ∵ ب أ < نق

∴ يمكن للرادار رصد السفينة الواقعة عند «ب»

٣

∵ ل = -٢ ، ك = ٦ ، حـ = -٦٠

∴ $نق^٢ = ٤ + ٣٦ + ٦٠ = ١٠٠$

∴ مساحة الشكل الثمانى المنتظم

$= \frac{ن}{٢} نق^٢ \text{ حا} \left(\frac{٣٦٠^\circ}{ن}\right) = \frac{٨}{٢} × ١٠٠ × \text{حا } ٤٥^\circ$

$\simeq ٢٠٠\sqrt{٢}$ وحدة مربعة.

٤

① ∵ البكرة أ تمس محورى الإحداثيات ، وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

∴ مركز دائرتها النقطة م (٥ ، ٥)

∴ معادلتها هى : $(س - ٥)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

أى أن :

$س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ١٠ ص + ٢٥ = ٠$

② ∵ معادلة دائرة البكرة (ب) :

$س^٢ + ص^٢ + ١٤ س + ٤٥ = ٠$

∴ ل = ٧ ، ك = ٠ ، حـ = ٤٥

، نق = $\sqrt{٤٩ - ٤٥} = ٢$

ويكون مركزها النقطة ن (-٧ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوى ٢ وحدة.

∴ البعد بين مركزى البكرتين = م ن

$= \sqrt{(٥ + ٧)^٢ + (٥)^٢} = ١٣$ وحدة

∵ كل وحدة فى المستوى الاحداثى تمثل ٦ سم

∴ البعد بين البكرتين = ١٣ × ٦ = ٧٨ سم

٥

∵ أقصى ارتفاع بين الحافتين = ١٠ وحدات

∴ ٢ $نق_١$ + ٢ $نق_٢$ = ١٠ ∴ $نق_١ + نق_٢ = ٥$

، مركز الترس الأكبر هو (٥ ، ٤)

∴ مركز الترس الأصغر هو (٥ ، ٩)

$نق_١^٢ = ٢٥ + ١٦ - ٣٢ = ٩$

∴ $نق_١$ = ٣ وحدة ∴ $نق_٢$ = ٢ وحدة

∴ معادلة الترس الأصغر هى :

$(س - ٥)^٢ + (ص - ٩)^٢ = ٤$

أى أن : $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ١٨ ص + ١٠٢ = ٠$